Tampereen yliopisto

Suvi Runonen

Vararikkoteoria

Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Matematiikka
Huhtikuu 2020

TIIVISTELMÄ

Suvi Runonen: Vararikkoteoria
Pro gradu -tutkielma
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Huhtikuu 2020

Tutkielmassa tarkastellaan vararikkoteoriaa vakuutusyhtiön näkökulmasta. Tutkielmassa vararikon tarkastelu on jaettu kahteen osaan, klassiseen vararikkoteoriaan ja edistyneeseen vararikkoteoriaan. Vakuutusyhtiön korvaamien vahinkojen lukumäärää kuvataan Poisson-jakautuneena satunnaismuuttujana, sillä vahinkojen oletetaan olevan ennalta arvaamattomia. Vakuuttajan vahingoista aiheutuvaa korvausvastuuta mallinnetaan kollektiivisten riskimallien avulla. Vahingoista korvattavaa rahasummaa eli vahinkomäärää arvioidaan vahinkoja ja niiden suuruutta kuvaavien jakaumien avulla. Näiden perusteella saadaan muodostettua vahinkojen lukumäärän ja vahinkomäärän prosessit, joita tutkielmassa mallinnetaan Poisson-prosesseina. Klassista vararikkoteoriaa tarkastellaan utiliteettien avulla. Utiliteettien ja vahinkoprosessin avulla määritellään ylijäämäprosessi, jota käytetään vararikon mallintamisessa. Edistyneen vararikon tarkastelu rajoitetaan vararikon vakavuuteen, ylijäämään ennen vararikkoa ja vararikon ajanhetkeen. Tutkielman päälähteenä on käytetty D. Dicksonin kirjaa Insurance risk and ruin.

Avainsanat: vararikko, todennäköisyys, Poisson-prosessi
Tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -ohjelmalla.

Sisältö

1 Johdanto

Vakuutusyhtiö pyrkii mallintamaan tulevia vahinkoja ja niiden suuruutta. Yhtiön varallisuuden tulee kattaa aiheutuneet vahingot, joten maksutuloa täytyy kerätä riittävästi vakuutussopimuksista. Jos vakuutusyhtiön varallisuus ei riitä kattamaan vahingoista aiheutuvaa korvausvastuuta, seuraa vararikko. Jotta vahingoista aiheutuva korvausvastuu ei kasvaisi suuremmaksi kuin vakuutussopimuksista saatu maksutulo, tulee vakuutusmaksua määrittäessä ennustaa tulevien vahinkojen kustannuksia. Vahingot ovat satunnaisia, joten niitä mallinnetaan satunnaismuuttujina.

Tässä tutkielmassa käsitellään klassista vararikkoteoriaa lähestymällä aihetta Poisson-prosessin mukaisesti syntyneiden vahinkojen näkökulmasta; lopuksi esitellään edistynyttä vararikkoteoriaa. Tutkielman aiheen käsittely aloitetaan vahinkomäärän mallintamisen ja korvausvastuun tarkastelulla. Vahinkojen lukumäärän ja suuruuden oletetaan olevan riippumattomia satunnaismuuttujia. Tutkielman alussa käsitellään vahinkomäärän mallintamista ja kollektiivisia riskimalleja. Satunnaismuuttujat oletetaan riippumattomasti jakautuneiksi, sillä tyypillisesti vahinkotapahtumat eivät ole toisistaan riippuvaisia. Tutkielman alkupuolella määritellään Poisson-prosessi, jota käytetään stokastisena prosessina muodostettaessa tutkielman prosesseja, kuten vahinkojen lukumäärän prosessi ja vahinkomäärän prosessi. Vahinkojen lukumäärän prosessi viittaa sattuneiden vahinkojen kappalemäärään ja vahinkomäärän prosessi vahinkojen rahalliseen määrään. Lisäksi esitellään määrittely riskille, joka on vakuutustoiminnan kannalta keskeinen käsite.

Tutkielman loppupuolella tarkastellaan edistynyttä vararikkoteoriaa eli tarkastellaan aihetta syvemmin. Aloitetaan määrittämällä raja sille, mikä on sellainen taso, josta vararikko seuraa. Tämä niin kutsuttu rajaongelma kuvaa vararikon sattumisen todennäköisyyttä tiettyyn ylijäämäprosessin arvoon suhteutettuna. Tässä yhteydessä tarkastellaan myös vakuuttajan ylijäämää ennen vararikkoa, eli ennen vararikon aiheuttaman vahingon maksamista. Lisäksi tarkastellaan vararikon vakavuutta, eli sitä, kuinka paljon käytettävissä olevaa varallisuutta tulisi olla kattamaan korvausvastuu, mikäli vararikko tapahtuu. Lisäksi määritetään vararikon ajanhetki eli hetki, jolloin vararikko tapahtuu. Tämä kertoo, kuinka kauan alkuvarallisuus riittää kattamaan vahingoista aiheutuvan korvausvastuun, eli kuinka kauan onnistutaan välttämään vararikko.

Tutkielman päälähde on Dicksonin kirja Insurance risk and ruin [3]. Ensimmäisen luvun keskeisimpinä lähteinä toimivat Tuomisen kirja Todennäköisyyslaskenta 1 [8], Tsen kirja Nonlife actuarial models [7] sekä Mikoschin kirja Non-life insurance mathematics [5]. Näiden lisäksi tutkielman lähteinä toimivat Kaasin, Goovaertsin, Dhaenen ja Denuitin kirja Modern actuarial risk theory [4], Promislowin kirja Fundamentals of actuarial mathematics [6], Wüthrichin ja Merzin kirja Stochastic claims reserving methods in insurance [9], Beardin, Pentikäisen ja Pesosen kirja Risk theory sekä [1] Bühlmannin kirja Mathematical methods in risk theory [2].

2 Vahinkomäärän mallintaminen ja korvausvastuu

Tässä luvussa määritellään käsitteitä tulevaa varten. Aloitetaan määrittelemällä satunnaismuuttujan käsite, sekä tiheysfunktio ja todennäköisyysfunktio. Tämän jälkeen määritellään momentit ja momentit generoiva funktio, sekä todennäköisyyden generoiva funktio. Tutkielman aiheen käsittely aloitetaan vahinkomäärän mallintamisen tarkastelulla, missä vahingot oletetaan Poisson-jakautuneiksi. Tässä luvussa esitellään myös vahinkojen lukumäärän prosessi ja vahinkomäärän prosessi. Näiden avulla vakuutusyhtiö pyrkii mallintamaan tulevia vahinkoja ja niiden suuruutta, sillä vakuutussopimuksista kerättävän maksutulon tulisi olla riittävä kattamaan tulevat vahingot. Vahinkojen oletetaan olevan satunnaisia ja yleensä toisistaan riippumattomia ja niiden vahinkomäärä eli vahingosta maksettavien korvausten määrä, on satunnainen. Jotta tiedettäisiin, paljonko maksutuloa tulee kerätä, pyritään ennakoimaan vahinkojen määrää ja suuruutta.

Todennäköisyyden peruskäsitteet, kuten satunnaismuuttujan käsite, todennäköisyysavaruudet ja todennäköisyyden aksioomat oletetaan tunnetuiksi, kuten myös todennäköisyysjakaumat ja niiden perusominaisuudet. Tutkielman alussa esitellään lyhyesti tutkielman kannalta oleellisia käsitteitä.

2.1 Stokastiikkaa

Tämän alaluvun esitys pohjautuu pääsääntöisesti Tuomisen kirjan [8] lukuun 2. Tämän lisäksi on käytetty Tuomisen kirjan [8] lukua 3 ja Tsen kirjan [7] lukua 1, mikäli näin on mainittu. Tässä alaluvussa lauseiden todistukset sivuutetaan.

Määritelmä 2.1. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ todennäköisyysavaruus ja $X : \Omega \to \mathbb{R}$ kuvaus. Muuttuja X on *diskreetti satunnaismuuttuja* todennäköisyysavaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, jos muuttujan X arvojoukko $X(\Omega)$ on numeroituva joukko $\{x_1, x_2 \dots\}$ ja $\{X = x_k\} \in \mathcal{F}$ kaikilla k.

Määritelmä 2.2. Diskreetin satunnaismuuttujan X *pistetodennäköisyysfunktio* eli *todennäköisyysfunktio* on funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, missä

$$f(x) = \mathrm{P}(X = x), \text{ kun } x \in \mathbb{R}.$$

Pistetodennäköisyysfunktiolla on seuraavat ominaisuudet:

1. $f(x) \geq 0,$ kun $x \in \mathbb{R}$.
2. Jos $f(x) > 0$, niin x kuuluu satunnaismuuttujan X numeroituvaan arvojoukkoon $\{x_1, x_2, \dots\}$.
3. $\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) = 1$.

Määritelmä 2.3. Olkoon X satunnaismuuttuja. Satunnaismuuttujan X *kertymäfunktio* on funktio $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle $F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Pistetodennäköisyydet $p_k = f(x_k) = \mathrm{P}(X = x_k)$, missä $x_k \in X(\Omega)$ määräävät diskreetin satunnaismuuttujan X kertymäfunktion yksikäsitteisesti, sillä $F(x) = \sum_{k, x_k \leq x} p_k$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Määritelmä 2.4. Olkoon X diskreetti satunnaismuuttuja. Sen *odotusarvo* määritellään seuraavasti: $\mathrm{E}(X) = \sum_k x_k f(x_k)$, mikäli $\sum_k |x_k| f(x_k) < \infty$ eli sarja suppenee itseisesti. Mikäli sarja ei suppene itseisesti, sanotaan, että funktiolla X ei ole odotusarvoa.

Määritelmä 2.5. Satunnaismuuttujalla X on *jatkuva jakauma tiheysfunktiona* f, jos

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Huomautus 2.6. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on tiheysfunktio, jos ja vain jos

1. $f \geq 0$,
2. f on integroituva joukon $\mathbb{R}$ suhteen ja $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$.

Lause 2.7. *Jos satunnaismuuttujalla X on jatkuva jakauma todennäköisyysfunktiona f, niin satunnaismuuttujan X kertymäfunktiolle F, $F(x) = P(X \leq x)$, pätee*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

missä $x \in \mathbb{R}$. Siis $f(x) = F'(x)$ kaikissa funktion f jatkuvuuspisteissä. □

Määritelmä 2.8. [7, s. 5] Muuttujan X *momentit generoiva funktio* $\mathrm{M}_X(t)$ on funktio, jonka arvo kohdassa $t \in \mathbb{R}$ määritellään kaavalla $M_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$, kun odotusarvo on olemassa.

Lause 2.9. *[7, s. 5] Oletetaan, että momentit generoiva funktio on määritelty jollakin reaalilukuvälillä. Tällöin momentit generoiva funktio määrittää jakauman yksikäsitteisesti.* □

Määritelmä 2.10. [8, s. 95] Olkoon X diskreetti satunnaismuuttuja, jonka arvot ovat luonnollisia lukuja. Satunnaismuuttujan X *todennäköisyyden generoiva funktio* on tällöin

$$\mathrm{G}_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k,$$

missä $p_k = \mathrm{P}(X = k)$. Määritelmä voidaan yhtäpitävästi kirjoittaa muodossa

$$\mathrm{G}_X(t) = \mathrm{E}(t^X).$$

Lause 2.11. *[8, s. 95] Jos X on $\mathbb{N}$-arvoinen diskreetti satunnaismuuttuja, niin tällöin satunnaismuuttujan X todennäköisyyden generoiva funktio $\mathrm{G}_X(t)$ määrää muuttujan X jakauman yksikäsitteisesti.* □

Lause 2.12. *[7, s. 6] Oletetaan, että X on $\mathbb{N}$-arvoinen satunnaismuuttuja. Satunnaismuuttujan X momentit generoiva funktio ja todennäköisyyden generoiva funktio ovat yhteydessä toisiinsa yhtälön*

$$\mathrm{M}_X(t) = \mathrm{G}_X(e^t)$$

osoittamalla tavalla. □

2.2 Poisson-jakauma ja Poisson-prosessi

Tämän alaluvun esitys pohjautuu pääsääntöisesti Tsen kirjan [7] lukuun 1. Tämän lisäksi lähteenä on käytetty Mikoschin kirjan [5] lukua 2 ja Tuomisen kirjan [8] lukua 3, mikäli näin on mainittu.

Määritelmä 2.13. Epänegatiivinen diskreetti $\mathbb{N}$-arvoinen satunnaismuuttuja X on *Poisson-jakautunut parametrilla* λ, jos muuttujan X todennäköisyysfunktio saadaan yhtälöstä

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!},$$

kun $x = 0, 1, \ldots,$ missä $\lambda > 0$. Merkitään $X \sim \mathcal{PN}(\lambda)$.

Muuttujan X odotusarvo ja varianssi on

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda.$$

Muuttujan X momentit generoiva funktio on

$$\mathrm{M}_X(t) = \exp[\lambda(e^t - 1)]$$

ja todennäköisyyden generoiva funktio on

$$\mathrm{G}_X(t) = \exp[\lambda(t - 1)].$$

Lause 2.14. *Olkoot $X_1, \ldots, X_n$ riippumattomasti jakautuneita ja $X_i \sim \mathcal{PN}(\lambda_i)$, kun $i = 1, \ldots, n$. Tällöin $X = X_1 + \cdots + X_n$ on Poisson-jakautunut parametrilla $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.*

Todistus. Määritelmän 2.8 perusteella muuttujan X momentit generoiva funktio on $\mathrm{M}_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$. Edelleen saadaan

$$\mathrm{M}_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}) = \mathrm{E}(e^{tX_1+\cdots+tX_n}) = \mathrm{E}(\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}).$$

Edelleen, koska muuttujat X_i ovat riippumattomia, saadaan

$$\mathrm{E}(\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}(e^{tX_i}) = \prod_{i=1}^{n} \exp(\lambda_i(e^t-1)) = \exp((e^t-1)\sum_{i=1}^{n} \lambda_i) = \exp((e^t-1)\lambda),$$

joka on jakauman $\mathcal{PN}(\lambda)$ momentit generoiva funktio. Koska momentit generoiva funktio määrää jakauman yksikäsitteisesti, niin $X \sim \mathcal{PN}(\lambda)$.

□

2.2.1 Poisson-prosessi

Määritelmä 2.15. [8, s. 103] Määritellään seuraavaksi *Poisson-prosessi*. Merkitään satunnaismuuttujalla $X(\Delta)$ aikavälillä $\Delta = [t, u] \subset \mathbb{R}_+$ sattuvien vahinkojen lukumäärää. Oletetaan pisteiden satunnaisesta sijoittelusta seuraavaa:

1. Satunnaismuuttujan $X(\Delta)$ jakauma riippuu vain aikavälin $\Delta = [t, u]$ pituudesta $|\Delta|$.

2. Jos Δ_1 ja Δ_2 ovat erillisiä aikavälejä, niin satunnaismuuttujat $X(\Delta_1)$ ja $X(\Delta_2)$ ovat riippumattomia.

3. On olemassa positiivinen vakio λ, jolle pätee $\mathrm{P}(X(\Delta) \geq 1) = \lambda h + h\epsilon(h)$ ja $\mathrm{P}(X(\delta > 1)) = h\epsilon(h)$, kun $|\Delta| = h$, missä $\epsilon(h)$ on jäännöstermi, jolle pätee $\epsilon(h) \to 0$, kun $h \to 0$.

Olkoon $|\Delta| = t > 0$. Jaetaan väli Δn kappaleeseen yhtä pitkiä, erillisiä osavälejä $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Tällöin

$$X(\Delta) = \sum_{k=1}^{n} X(\Delta_k).$$

Oletuksen 1. nojalla kaikilla $X(\Delta_k)$ on sama jakauma ja näin ollen myös sama todennäköisyyden generoiva funktio. Merkitään tätä notaatiolla G_n. Oletuksesta 3. seuraa, että

$$\mathrm{P}(X(\Delta_k) = 0) = 1 - \lambda\frac{t}{n} + \frac{t}{n}\epsilon(\frac{t}{n}),$$

$$\mathrm{P}(X(\Delta_k) = 1) = \lambda\frac{t}{n} + \frac{t}{n}\epsilon(\frac{t}{n})$$

ja

$$\mathrm{P}(X(\Delta_k) > 1) = \frac{t}{n}\epsilon(\frac{t}{n}).$$

Merkitään nyt todennäköisyyden generoivan funktion G_n vapaata muuttujaa muuttujalla z. Tällöin

$$\mathrm{G}_n(z) = 1 - \lambda\frac{t}{n} + \lambda\frac{t}{n}z + \frac{t}{n}\epsilon(\frac{t}{n}) + r(z),$$

missä kaikilla $|z| \leq 1$ pätee

$$|r(z)| \leq \mathrm{P}(X(\Delta_k) > 1) = \frac{t}{n}\epsilon(\frac{t}{n}).$$

Koska satunnaismuuttujan $X(\Delta)$ summaesityksessä yhteenlaskettavat ovat riippumattomia oletuksen 2. nojalla, niin satunnaismuuttujan $X(\Delta)$ todennäköisyyden generoivalle funktiolle saadaan esitys

$$\mathrm{G}_X(z) = (\mathrm{G}_n(z))^n = (1 + \frac{\lambda t}{n}(z-1) + \frac{t}{n}\epsilon(\frac{t}{n}))^n.$$

Tämä pätee kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Kun $n \to \infty$ havaitaan, että

$$\mathrm{G}_X(z) = e^{\lambda t(z-1)},$$

missä $|z| \leq 1$. Tästä seuraa, että

$$|\Delta| = t \Rightarrow X(\Delta) \sim \mathcal{PN}(\lambda t).$$

Vakiota λ kutsutaan *Poisson-intensiteetiksi*. Poisson-intensiteetille pätee $\mathrm{P}(X(\Delta) \geq 1) \approx \lambda |\Delta|$ ja lisäksi $\mathrm{E}(X(\Delta)) = \lambda |\Delta|$. Toisin sanoen λ on vahinkojen keskimääräinen lukumäärä aikayksikköä kohden.

2.3 Kollektiiviset riskimallit

Tämän alaluvun lähteinä on käytetty Mikoschin kirjaa [5, s. 7-8], Bühlmannin kirjaa [2, s. 35-42] ja Kaasin kirjaa [4, s. 84-85].

Määritelmä 2.16. Määritellään yksinkertainen *riskimalli*. Malli sisältää seuraavat oletukset.

1. Vahingot tapahtuvat hetkinä T_i, missä $0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots$.
2. Vahingon sattumisjärjestyksessä i. vahinko, joka sattuu hetkellä T_i aiheuttaa vahingon, jonka suuruus on X_i, missä jono $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$ muodostuu epänegatiivisista satunnaismuuttujista.
3. Vahinkojen sattumishetket $(T_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$ ja vahinkojen suuruudet $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$ ovat toisistaan riippumattomia.

Määritelmä 2.17. Määritellään nyt vahinkojen *lukumäärän prosessi* $N(t) = \#\{i \geq 1 \mid T_i \leq t\}, t \geq 0$. Tässä $N(t)$ on hetkeen t mennessä sattuneiden vahinkojen lukumäärä ja $N = (N(t))_{t \geq 0}$ on laskuriprosessi välillä $[0, \infty]$.

Määritelmä 2.18. Vahinkojen *vahinkomäärän prosessi* määritellään

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i = \sum_{i=1}^{\infty} X_i I_{[0,t]}(T_i),$$

missä $t \geq 0$ ja $I_{[0,t]}(T_i)$ on indikaattorifunktio, joka kertoo, onko vahingon sattumishetki T_i aikavälillä $[0, t]$ eli $I_{[0,t]}(T_i) = 1$, kun $T_i \in [0, t]$ ja 0 muuten, ja

$$S(t) = X_1 + X_2 + \dots + X_{N(t)},$$

missä $N(t)$ on vahinkojen määrä hetkeen t mennessä ja $X_i \geq 0$ on i. vahingon määrä.

Huomautus 2.19. Prosessi $S = (S(t))_{t \geq 0}$ on satunnainen osittaissummaprosessi, sillä osittaissummassa $S_n = X_1 + \dots + X_n$ luku n on korvattu satunnaismuuttujalla $N(t)$ seuraavasti

$$S(t) = X_1 + \dots + X_{N(t)} = S_{N(t)}, \text{ kun } t \geq 0.$$

Määritelmä 2.20. *Riski* voidaan määritellä ajasta riippuvana parina $(P(t), S(t))$, missä $P(t) = ct$ on hetkeen t mennessä saatu maksutulo, c on maksutulo aikayksikköä kohden ja $S(t)$ on hetkeen t mennessä sattuneiden vahinkojen vahinkomäärä.

Molemmat näistä voivat olla satunnaismuuttujia ja stokastisia prosesseja tai funktioita, jotka eivät ole sattumanvaraisia. Yleensä $P(t)$ ajatellaan ennalta tiedetyksi ja $S(t)$ stokastiseksi. Vahinkomäärään perustuvan maksun tapauksessa kuitenkin myös $P(t)$ on stokastinen prosessi. Riskin analysoinnissa merkittävää on kahden määrittelevän funktion erotus $P(t) - S(t)$. Jatkossa oletetaan $P(t)$ deterministiseksi funktioksi.

Esimerkki 2.21. Klassisessa kollektiivisessa riskiteoriassa oletetaan, että vahinkojen lukumäärän prosessin lisäykset ovat toisistaan riippumattomia. Aiempien tulosten nojalla $N(t)$ on tällöin Poisson-prosessi, esimerkiksi $\mathrm{P}(N(t) = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$.

Esimerkki 2.22. Vahinkojen lukumäärän prosessi $N(t)$ on Poisson-prosessi intensiteetillä $\lambda > 0$. Prosessin lisäyksillä on seuraava ominaisuus: $N(t+h) - N(t) \sim \mathcal{PN}(\lambda h)$ kaikilla $t > 0$, $h > 0$ ja kaikilla aikaisemmilla $N(s)$, $s \leq t$. Tästä seuraa, että Poisson-prosessilla on seuraavat ominaisuudet

1. Lisäykset ovat riippumattomia: jos aikavälit $[t_i, t_i + h_i]$, missä $i = 1, 2, \ldots$ ovat erillisiä, niin lisäykset $N(t_i + h_i) - N(t_i)$ ovat riippumattomia.

2. Lisäykset ovat stationaarisia eli muuttumattomia: $N(t+h) - N(t)$ on Poisson-jakautunut parametrilla λh kaikilla muuttujan t arvoilla.

3 Vararikkoteorian perusteet

Tässä luvussa esitellään klassisen vararikkoteorian perusteita. Aloitetaan tarkastelemalla utiliteetteja, jotka kuvaavat yhtiön käytössä olevaa varallisuutta. Utiliteettien tarkastelun jälkeen määritellään ylijäämäprosessi, joka kuvaa vakuuttajan varallisuutta huomioiden alkupääoman, maksutulon ja vahinkomäärän. Tämän jälkeen määritellään tutkielman kannalta keskeinen vararikon käsite, jonka jälkeen tarkastellaan vararikon todennäköisyyttä rajoitetulla ja äärettömällä aikavälillä.

3.1 Utiliteetit

Tämän alaluvun esitys pohjautuu pääsääntöisesti Bühlmannin kirjan [2] lukuun 6. Tämän lisäksi lähteenä on käytetty Dicksonin kirjan [3] lukua 2, mikäli näin on mainittu.

Tarkastellaan satunnaisprosessia $(Z(t))_{t\geq 0}$, missä $Z(t) = Q + P(t) - S(t)$ ja Q on vapaa alkuvarallisuus, $P(t)$ on kertynyt maksutulo välillä $[0, t]$ ja $S(t)$ on kertynyt vahinkoprosessi välillä $[0, t]$. Satunnaisprosessi $Z(t)$ ilmaisee jäljellä olevan *vapaan varallisuuden* hetkellä t.

Määritellään arviointikriteeri satunnaiselle vapaan varallisuuden prosessille $(Z(t))_{t\geq 0}$ arvona $\mathrm{U}((Z(t))_{t\geq 0})$. *Utiliteetit* voidaan määrittää arviona vararikon todennäköisyyden perusteella tai arviona diskontattujen osinkojen summasta.

Tarkastellaan tapausta, jossa utiliteetti määritellään vararikon todennäköisyyden perusteella. Tällöin voidaan asettaa utiliteetiksi

$$\mathrm{U}((Z(t))_{t\geq 0}) = \mathrm{P}(Z(t) \geq 0 \text{ kaikilla } t \geq 0),$$

mikä on todennäköisyys sille, että satunnaisprosessi ei päädy vararikkoon.

Utiliteettifunktio on hyödyllinen, sillä sen avulla voidaan valita kahden satunnaisprosessin väliltä. Satunnaisprosessi $(Z(t))_{t\geq 0}$ katsotaan paremmaksi kuin $(Z'(t))_{t\geq 0}$, jos $\mathrm{U}((Z(t))_{t\geq 0}) > \mathrm{U}((Z'(t))_{t\geq 0})$.

Määritelmä 3.1. Utiliteettien U ja L sanotaan olevan *samanarvoisia*, mikäli mille tahansa kahdelle satunnaisprosessille $(Z'(t))_{t\geq 0}$ ja $(Z''(t))_{t\geq 0}$ pätee

$$\mathrm{U}((Z'(t))_{t\geq 0}) \geq \mathrm{U}((Z''(t))_{t\geq 0}) \Leftrightarrow \mathrm{L}((Z'(t))_{t\geq 0}) \geq \mathrm{L}((Z''(t))_{t\geq 0}).$$

(Ks. [3, s. 27-28]) Utiliteettifunktio $\mathbf{U}(x)$ mittaa sellaisen utilitettin subjektiivista arvoa, joka liitetään rahalliseen arvoon x. Utiliteettifunktio saa sitä suuremman arvon, mitä merkittävämmäksi investoija utiliteetin kokee. Oletetaan, että utiliteettifunktio toteuttaa ehdot $\mathbf{U}'(x) > 0$ ja $\mathbf{U}''(x) < 0$, jolloin $\mathbf{U}$ on kasvava ja kupera funktio. Ensimmäinen ehto tarkoittaa sitä, että mikäli utiliteettifunktio on $\mathbf{U}$, yhtiö arvottaa määrää y enemmän kuin määrää z, eli $y > z$, ja toinen ehto tarkoittaa sitä, että kun varallisuus kasvaa, yhtiö asettaa vähemmän arvoa varallisuuden kiinteälle kasvulle.

Määritellään kriteeri *utiliteetin odotusarvolle*, johon utiliteettien käyttäminen päätöksenteossa perustuu. Oletetaan investoijan utiliteetin olevan $\mathbf{U}$. Investoija valitsee toisen kahdesta investoinnista, joiden oletetaan tuottavan summat X_1 ja X_2.

Oletetaan investoijan tämänhetkisen varallisuuden olevan W, joten sijoituksen tulos sijoituksessa i on $W + X_i$, missä $i = 1, 2, \ldots$. Tällöin, jos investoija valitsee investoinnin 1 mieluummin kuin investoinnin 2, saadaan utiliteetin odotusarvolle kriteeri

$$\mathrm{E}[\mathbf{U}(W + X_1)] > \mathrm{E}[\mathbf{U}(W + X_2)].$$

3.2 Ylijäämäprosessi

Tämän alaluvun esitys pohjautuu pääsääntöisesti Kaasin kirjan [4] lukuun 4. Tämän lisäksi lähteenä on käytetty Dicksonin kirjan [3] lukua 7, mikäli näin on mainittu.

Määritelmä 3.2. Määritellään *ylijäämäprosessi* seuraavasti:

$$U(t) = U(0) + P(t) - S(t), t \geq 0,$$

missä $U(t)$ on vakuuttajan varallisuus hetkellä t, $U(0) = u$ on alkupääoma, $P(t)$ ja $S(t)$ kuten aiemmissa osioissa.

Määritelmä 3.3. *Vararikko* tapahtuu, kun sattuneiden vahinkojen yhteisvahinkomäärä on suurempi kuin alkupääoma $U(0)$ ja saatu maksutulo $P(T)$. Merkitään ensimmäistä hetkeä, kun tällainen tapahtuma tapahtuu muuttujalla T, jolloin saadaan

$$T = \min\{t \mid t \geq 0; U(t) < 0\} = \infty, \text{ kun } U(t) \geq 0 \text{ kaikilla } t.$$

Satunnaismuuttuja T on vaillinainen, sillä tapahtuman $T = \infty$ todennäköisyys on positiivinen. Todennäköisyyttä sille, että vararikko tapahtuu jossain vaiheessa, eli toisin sanoen todennäköisyys sille, että T on äärellinen, kutsutaan vararikkotodennäköisyydeksi. Merkitään $\psi(u) = \mathrm{P}(T < \infty)$.

(Ks. [3, s. 125-126]) Tarkastellaan klassisessa riskiprosessissa vakuuttajan ylijäämää kiinteässä ajassa $t > 0$. Vakuuttajan ylijäämä määräytyy ylijäämän määrästä hetkellä 0, hetkeen t mennessä kertyneestä maksutulosta ja hetkeen t mennessä maksetuista korvauksista. Koska maksetut korvaukset on näistä ainoa satunnaismuuttuja, niin kertyneen vahinkoprosessin kuvaamiseksi merkitään $S(t)_{t \geq 0}$.

Olkoon $N(t)_{t \geq 0}$ sellainen laskentaprosessi vahinkojen lukumäärälle, missä kiinteällä arvolla $t > 0$ satunnaismuuttuja $N(t)$ tarkoittaa välillä $[0, t]$ tapahtuvien vahinkojen lukumäärää. Klassisessa riskiprosessissa oletetaan, että $N(t)_{t \geq 0}$ on Poisson-prosessi. Yksittäistä vahinkomäärää mallinnetaan jonona riippumattomia samoin jakautuneita satunnaismuuttujia $(X_i)_{i=1}^{\infty}$, missä X_i tarkoittaa vahingon i suuruutta. Voidaan sanoa, että vahinkojen kokonaismäärä hetkeen t mennessä on $S(t)$, missä $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ ja $S(t) = 0$, kun $N(t) = 0$. Vahinkojen kokonaismäärän laskuriprosessi $S(t)_{t \geq 0}$ on tällöin yhdistetty Poisson-prosessi.

Merkitään sitten satunnaismuuttujan X_1 kertymäfunktiota symbolilla F ja oletetaan, että $F(0) = 0$, jolloin kaikki vahinkomäärät ovat positiivisia. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että tämä jakauma on jatkuva intensiteetillä f ja jakauman X_1 k. momenttia merkitään m_k. Kun satunnaismuuttujan X_1 momentit generoiva funktio on olemassa, merkitään sitä symbolilla M_X ja oletetaan, että kun tämä on olemassa, on olemassa myös sellainen raja γ, että $0 < \gamma \leq \infty$ ja $\mathrm{M}_X(r)$ on äärellinen jokaisella $r < \gamma$ ja $\lim_{r \to \gamma-} \mathrm{M}_X(r) = \infty$.

3.3 Vararikkotodennäköisyys

Tämän luvun esitys pohjautuu pääsääntöisesti Dicksonin kirjan [3] lukuun 7. Tämän lisäksi lähteenä on käytetty Beardin kirjaa [1], mikäli näin on mainittu.

(Ks. [1, s. 132-133]) Vararikkotodennäköisyys rajoitetulla aikavälillä on

$$\psi_N(u) = \mathrm{P}(U_k \leq 0 \text{ jollakin } 1 \leq k \leq N \mid U_0 = u) = 1 - H_N(0, u).$$

Tarkastellaan funktiota $\psi_N(u)$, mikä on todennäköisyys sille, että vähintään yhden vuosista $1, 2, \ldots, N$ lopussa vahingot ylittävät yhtiön käytössä olevat varat eli yhtiö joutuu vararikkoon. Oletetaan, että yhtiön varaukset ajanhetkestä 0 alkaen hetkillä $1, 2, \ldots, N$ ovat vastaavasti $U_0, U_1, \ldots, U_N$, joista jokainen on satunnaismuuttuja, paitsi $U_0 = u$, mikä on tiedossa. Todennäköisyys on tällöin

$$\psi_N(u) = \mathrm{P}(U_k \leq 0 \text{ jollakin } 1 \leq k \leq N \mid U_0 = u).$$

Olkoon sitten $H_1(x, u)$ todennäköisyys sille, että varaukset hetkellä 1 ovat yli määrän x jollakin $U_0 = u$ ja yleisesti oletetaan, että $H_k(x, u)$ on todennäköisyys tapahtumalle

$$\{U_1 > 0, U_2 > 0, \ldots, U_{k-1} > 0, U_k > x \mid U_0 = u\}.$$

Funktion $F(x)$ oletetaan olevan vahinkojen kokonaismäärän jakauma 1 vuoden aikana ja pysyvän vakaana ja tapauksista riippumattomana seuraavina vuosina. Kun $k > 1$, funktio H_k voidaan laskea mielivaltaiselle kokonaisluvulle s seuraavasti:

$$\begin{aligned} H_k(x, u) = & \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{P}(U_k > x \mid \frac{i}{s} < U_{k-1} \leq \frac{(i+1)}{s}) \\ & \cdot \mathrm{P}(\frac{i}{s} < U_{k-1} \leq \frac{(i+1)}{s}, U_1 > 0, \ldots, U_{k-2} > 0 \mid U_0 = u). \end{aligned}$$

Ensimmäinen termi summasta on selvästi $H_1(x, \frac{i}{s}) + O(\frac{i}{s})$, missä $O(\frac{i}{s})$ on raja-arvoa kuvaava funktio, ja toinen termi on yhtäpitävää seuraavan kanssa;

$$H_{k-1}(\frac{i}{s}, u) - H_{k-1}(\frac{(i+i)}{s}, u).$$

Kun $s \longrightarrow \infty$, niin

$$H_k(x, u) = -\int_0^{\infty} H_1(x, t) d_t H_{k-1}(t, u).$$

Jotta voitaisiin käyttää rekursiota, on aloitusfunktio H_1 tarpeen ja se on

$$H_1(x, u) = F(u + (1 + \lambda)P - x).$$

Lopulta saadaan

$$\psi_N(u) = 1 - H_N(0, u).$$

(Ks. [1, s. 137-138]) Oletetaan, että vahinkojen kokonaismäärät eri vuosien välillä ovat samoin jakautuneita ja niillä on yhteinen kertymäfunktio $F(x)$. Oletetaan lisäksi, että yksittäisen vahingon vahinkomäärän jakauma $S(z)$ on ajasta riippumaton, ja että yhtiöllä on riskivaraus U_0 jonkin äärellisen aikavälin T alussa ja merkitään $N(T) = \xi$ vahinkojen kokonaismäärää tällä aikavälillä. Tarkastellaan ylijäämää $U = (1+\lambda)P - \xi$, missä vakio $\lambda \geq 0$ on niin sanottu turvallisuusvaraus, $P = \mathrm{E}(\xi)$ on nettoriskimaksu aikavälillä T, mikä oletetaan myös vakioksi. Jos ylijäämät N peräkkäiseltä jaksolta katsotaan olevan $\omega_N = U_1 + U_2 + \cdots + U_N$, niin ω_N on diskreettiin satunnaisprosessiin liitetyn ajan satunnaisfunktio. Mahdollisuuden todennäköisyys muodostetaan seuraavasti:

$$\omega_j \leq -U \text{ jollakin } 1 \leq j \leq N,$$

mikä määritelmän mukaan indikoi kyseessä olevan yhtiön maksukyvyttömyyttä. Maksukyvyttömyyden todennäköisyys on

$$\psi_N(U) = 1 - \mathrm{P}(\omega_i > -U, \text{ kun } i \leq N),$$

missä muuttujan N annetaan kasvaa rajatta.

Lause 3.4. *[1, s. 138-141] Oletetaan, että vahinkomäärät ξ_i seuraavien periodien aikana ovat toisistaan riippumattomia.Vararikkotodennäköisyydelle pätee tällöin*

$$\psi_N \leq e^{-RU},$$

missä R on määritelmässä 4.1. esiteltävä oikaisukerroin.

Todistus. Oletetaan, että satunnaismuuttujalla U_i, joka kuvaa i. periodin ylijäämää, on kertymäfunktio $G(y)$, mikä on muuttujasta i riippumaton. Erityisiä oletuksia koskien funktiota $G(y)$ ei tarvita. Pienintä sellaista kokonaislukua, jolla vararikko tapahtuu merkitään satunnaismuuttujalla v. Toisin sanoen v on arvo, jolle pätee $\omega_v \leq -U$ ja $\omega_j > -U (j > v)$. Momentit generoivaa funktiota voidaan käyttää apufunktiona. Esimerkiksi

$$\mathrm{M}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sy} dG(y) = \mathrm{E}(e^{-sU_i}).$$

Apufunktiona voidaan myös käyttää läheisesti edelliseen liittyvää funktiota $\mathrm{E}(e^{s\omega_N})$, missä N on kokonaislukuvakio. Tämä on funktion $G(y)$ N. konvoluution momentit generoiva funktio. Periaatteena on johtaa kaksi eri laajennosta tälle funktiolle, josta sitten saadaan haluttu ratkaisu. Ensimmäinen laajennos on

$$\mathrm{E}(e^{-s\omega_N}) = \mathrm{E}(e^{-sU_1} e^{-sU_2} \ldots e^{-sU_N}) = \mathrm{M}(s)^N.$$

Toinen laajennos samalle funktiolle saadaan erottamalla tulos kahteen ryhmään. Ensimmäisessä ryhmässä on kaikki ne prosessin tulokset, jotka johtavat vararikkoon ensimmäisten N ajanjakson aikana. Todennäköisyys sille, että tulos saadaan tästä ryhmästä on ψ_N. Kaikki muut tulokset jäävät toiseen ryhmään; ne tulokset, jotka myöhemmin johtavat vararikkoon eli $v > N$ tai eivät johda vararikkoon ollenkaan eli

$v = \infty$. Nyt kyseessä oleva odotusarvo voidaan jakaa kahteen ehdolliseen odotusarvoon

$$\mathrm{E}(e^{-s\omega_N}) = \psi_N \mathrm{E}(e^{-s\omega_N} \mid v \leq N) + (1-\psi_N)\mathrm{E}(e^{-s\omega_N} \mid n < v \leq \infty). \tag{3.1}$$

Jokaiselle prosessin parametrin kiinteälle arvolle keskiarvo käyttäytyy kuten tässä ja myöhemmissä yhtälöissä. Ensimmäisestä termistä saadaan

$$\begin{aligned}
&\psi_N \cdot \mathrm{E}(e^{-s\omega_N} \mid v \leq N) = \psi_N \cdot \mathrm{E}(e^{-s\omega_v} \cdot e^{-s(\omega_N - \omega_v)} \mid v \leq N) \\
&= \psi_N \sum_{i=i}^{N} \mathrm{P}(v = i \mid v \leq N)\mathrm{E}(e^{-s\omega_v}[\mathrm{M}(s)]^{N-1} \mid v = i) \\
&= \psi_N \mathrm{E}(e^{-s\omega_v}[\mathrm{M}(s)]^{N-v} \mid v \leq N).
\end{aligned}$$

Laajennoksen jälkimmäinen muoto saadaan muuttujien ω_N ja $\mathrm{M}(s)$ määritelmien sekä muuttujien $\omega_N - \omega_v$ ja ω_v riippumattomuuden perusteella. Yhtälö (3.1) voidaan nyt kirjoittaa seuraavasti:

$$\mathrm{E}(e^{-s\omega_N}) = \psi_N \cdot \mathrm{E}(e^{-s\omega_v}[\mathrm{M}(s)]^{N-v} \mid v \leq N) + (1-\psi_N)\mathrm{E}(e^{-s\omega_N} \mid N < v \leq \infty).$$

Kertomalla ositusta määrällä $[\mathrm{M}(s)]^{-N}$ saadaan

$$1 = \psi_N \cdot \mathrm{E}(e^{-s\omega_v}[\mathrm{M}(s)]^{-v} \mid v \leq N) + (1-\psi_N) \cdot \mathrm{E}(e^{-s\omega_N}[\mathrm{M}(s)]^{-N} \mid N < v \leq \infty). \tag{3.2}$$

Toistaiseksi apumuuttuja s on ollut avoin. Jotta löydettäisiin sopivat arvot, apumuuttujalle annetaan arvo, jolla pätee

$$\mathrm{M}(s) = 1. \tag{3.3}$$

Jotta saadaan todistettua yhtälön ehdon täyttävän juuren $s = R$ olemassaolo, tarkastellaan seuraavia seikkoja:

$$\mathrm{M}(0) = 1, \mathrm{M}'(0) = \mathrm{E}(n) < 0 \text{ ja } \mathrm{M}''(s) = e(n^2 e^{sn}) > 0 \text{ kaikilla } s.$$

Tästä voidaan päätellä, että kun s kasvaa lähtöarvosta 0, niin $\mathrm{M}(s)$ pienenee lähtöarvosta 1 ja funktiota kuvaava käyrä on kupera kaikilla positiivisilla muuttujan s arvoilla. Toisaalta määritelmän mukaan n voi saada myös negatiivisia arvoja. Tällöin mikäli s on riittävän suuri, $\mathrm{M}(s)$ saavuttaa arvoa 1 suuremman arvon. Täten $\mathrm{M}(s)$ pienenee minimiinsä kohdan $s = 0$ jälkeen ja tämä minimi on pienempi kuin 1. Tästä näkökulmasta tarkasteltuna funktio kasvaa monotonisesti ja sen minimin ja maksimin välillä on yksi ehdon (3.3) toteuttava arvo $s = R$. Sijoitetaan tämä yhtälöön (3.2), jolloin saadaan

$$1 = \psi_N \cdot \mathrm{E}(e^{-R\omega_v} \mid v \leq N) + (1-\psi_N) \cdot \mathrm{E}(e^{-R\omega_N} \mid N < v \leq \infty).$$

Tehdään nyt kaksi approksimaatiota. Ensinnäkin toinen termi jätetään pois, sillä sen tiedetään olevan positiivinen tai nolla. Toiseksi muuttujan v määritelmän perusteella muuttujan ω_v arvo ensimmäisessä termissä kuvaa negatiivisen tulon vararikkoarvoa, sillä se on aina pienempää tai yhtäsuurta kuin $-U$. Jos nyt ω_v korvataan arvolla $-U$, ensimmäinen termi yhtälön oikealta pienenee. Täten

$$1 \geq \psi_N e^{RU} \text{ eli } \psi_N \leq e^{-RU}.$$

Tämä tulos on yksi riskiteorian päätuloksista. Siinä N voi olla mikä tahansa positiivinen kokonaisluku ja se pätee myös silloin kun N lähenee ääretöntä. □

Määritelmä 3.5. Määritellään *lopullisen vararikon todennäköisyys äärettömässä ajassa*

$$\psi(u) = \mathrm{P}(U(t) < 0 \text{ jollakin } t > 0).$$

Toisin sanoen $\psi(u)$ on todennäköisyys sille, että vakuuttajan ylijäämä putoaa alle nollan jonakin tulevana ajanhetkenä, eli korvausvaatimukset ylittävät ylijäämän ja maksutulon. Tämä on vararikon todennäköisyys jatkuvassa ajassa. Voidaan myös määrittää lopullisen vararikon todennäköisyys epäjatkuvassa ajassa

$$\psi_r(u) = \mathrm{P}(U(t) < 0 \text{ jollain } t > 0, t = r, 2r, 3r \ldots).$$

Täten tämän määritelmä mukaan vararikko sattuu vain, jos ylijäämä on alle nollan jollain ajanhetkellä $r, 2r, 3r \ldots$. Jos vararikko tapahtuu epäjatkuvan ajan määritelmän mukaisesti, sen pitää tapahtua myös jatkuvan ajan määritelmän mukaisesti. Tämä ei kuitenkaan päde toiseen suuntaan.

Lause 3.6. *Jos vararikko tapahtuu jatkuvan ajan määritelmän mukaisesti, se ei välttämättä tapahdu epäjatkuvan määritelmän mukaisesti.*

Todistus. Tarkastellaan ylijäämäprosessia, jossa jollain arvolla n pätee

$$U(nr) > 0 \text{ ja } U((n+1)r) > 0,$$

missä $U(\tau) < 0$ jollakin $\tau \in (nr, (n+1)r)$. Jos $U(t) > 0$ jokaisella t, joka ei kuulu välille $(nr, (n+1)r)$, niin vararikko tapahtuu jatkuvan ajan määritelmän mukaisesti, mutta ei epäjatkuvan ajan määritelmän mukaisesti. Täten $\psi_r(u) < \psi(u)$. Kuitenkin, kun r pienenee riittävästi, $\psi_r(u)$ on riittävä approksimaatio funktiolle $\psi(u)$. □

Määritelmä 3.7. Määritellään *äärellisen ajan vararikkotodennäköisyys* $\psi(u, t)$ seuraavasti

$$\psi(u, t) = \mathrm{P}(U(s) < 0 \text{ jollain } 0 < s \leq t).$$

Täten $\psi(u, t)$ on todennäköisyys sille, että vakuuttajan ylijäämä putoaa alle nollan jollakin äärellisellä aikavälillä $]0, t]$. Voidaan myös määritellä epäjatkuvan ajan vararikkotodennäköisyys äärellisessä ajassa seuraavasti

$$\psi_r(u, t) = \mathrm{P}(U(s) < 0 \text{ jollain } s = r, 2r, 3r, \ldots, t),$$

missä t on muuttujan r monikerta. On osoitettu, että $\psi_r(u) < \psi(u)$ pätee myös äärelliselle ajalle, ja täten myös $\psi_r(u, t) < \psi(u, t)$. Kun r on pieni, niin $\psi_r(u, t)$ on hyvä approksimaatio funktiolle $\psi(u, t)$.

Oletetaan, että $c > \lambda m_1$ siten, että aikayksikköä kohden maksutulo ylittää odotetun vahinkojen kokonaismäärän. Voidaan osoittaa, että mikäli tällainen niin sanottu nettotulon tilanne ei päde, niin $\psi(u) = 1$ kaikilla $u \geq 0$. Usein kirjoitetaan $c = (1 + \theta)\lambda m_1$, missä θ on ylimääräinen kuormituskerroin.

4 Klassinen vararikkoteoria

Tässä luvussa esitellään oikaisukerroin, joka oikaisee riskiprosessia vastaamaan paremmin odotettavaa prosessia. Tämän jälkeen määritellään selviämistodennäköisyyden käsite. Selviämistodennäköisyys kuvaa sitä todennäköisyyttä, jolla vakuuttaja selviää vastuistaan, eli alkuvarallisuus ja kertynyt maksutulo riittävät kattamaan sattuneet vahingot. Tämän jälkeen määritellään Laplace-muunnos, jota tarvitaan vararikon rekursiivisessa laskennassa. Rekursiivista laskentaa käsitellään sekä jatkuvassa että epäjatkuvassa ajassa. Lisäksi luvun loppupuolella esitellään vararikon approksimatiivista laskentaa.

4.1 Oikaisukerroin

Tämän alaluvun esitys pohjautuu Dicksonin kirjan [3] lukuun 7.

Määritelmä 4.1. Määritellään *oikaisukerroin*, jota merkitään symbolilla R. Oikaisukerroin ottaa huomioon vahinkojen yhteismäärän ja maksutulon. Klassisessa riskiprosessissa oikaisukertoimen on määritelty olevan yksikäsitteinen positiivinen juuri yhtälölle

$$\lambda \mathrm{M}_X(r) - \lambda - cr = 0, \tag{4.1}$$

missä λ on vahinkomäärän jakauman Poisson-intensiteetti, M_X on vahinkomäärän X momentit generoiva funktio ja c maksutulo aikayksikköä r kohden. R määräytyy siis ehdosta

$$\lambda + cR = \lambda \mathrm{M}_X(R). \tag{4.2}$$

Kirjoitetaan c muotoon $(1+\theta)\lambda m_1$, missä $\theta > 0$ on ylimääräinen kuormituskerroin ja m_1 on vahinkomäärän ensimmäinen momentti. Tällöin R on riippumaton Poissonparametrista λ.

Lause 4.2. *Oikaisukerroin R on hyvinmääritelty. Toisin sanoen yhtälöllä* (4.1) *on yksikäsitteinen ratkaisu.*

Todistus. Todistetaan, että on olemassa yksikäsitteinen positiivinen juuri yhtälölle

$$\lambda \mathrm{M}_X(r) - \lambda - cr = 0.$$

Tarkastellaan funktiota

$$g(r) = \lambda \mathrm{M}_X(r) - \lambda - cr.$$

Ensinnäkin havaitaan, että $g(0) = 0$. Toiseksi

$$\frac{dg}{dr}(r) = \lambda \frac{d}{dr}\mathrm{M}_X(r) - c,$$

joten

$$\frac{dg}{dr}(0) = \lambda m_1 - c$$

ja

$$c - \lambda m_1 = \theta \lambda m_1 > 0$$

ja edelleen

$$c > \lambda m_1.$$

Seuraavaksi havaitaan, että

$$\frac{d^2}{dr^2} g(r) = \lambda \frac{d^2}{dr^2} \mathrm{M}_X(r) = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{rx} f(x) dx > 0.$$

Jos funktiolla g on käännepiste, eli piste, jossa sen derivaatta on nolla, niin funktio saavuttaa miniminsä tässä käännepisteessä. Osoitetaan, että on olemassa $\gamma \leq \infty$, jolle

$$\lim_{r \to \gamma -} g(r) = \infty, \tag{4.3}$$

jolloin g on vähenevä nollan ympäristössä ja funktiolla on oltava yksikäsitteinen käännepiste. Täten on olemassa yksikäsitteinen positiivinen luku R siten, että $g(R) = 0$. Osoitetaan, että yhtälö (4.3) pätee. Oletetaan, että ei ole olemassa äärellistä lukua γ, jolle yhtälö (4.3) pätee. Koska kaikki vahinkomäärät ovat positiivisia, on olemassa positiivinen luku ϵ ja todennäköisyys p, joille pätee $\mathrm{P}(X_1 > \epsilon) = p > 0$, jolle

$$\mathrm{M}_X(r) = \int_0^\infty e^{rx} f(x) dx \geq \int_\epsilon^\infty e^{rx} f(x) dx \geq e^{r\epsilon} p,$$

ja täten

$$\lim_{r \to \infty} g(r) \geq \lim_{r \to \infty} (\lambda e^{r\epsilon} p - \lambda - cr) = \infty.$$

□

Lause 4.3. *Klassisessa riskiprosessissa pätee Lundbergin epäyhtälö $\psi(u) \leq e^{-Ru}$, missä R on oikaisukerroin.*

Todistus. Todistetaan väite induktiolla. Olkoon vararikkotodennäköisyys ennen n. vahinkoa $\psi_n(u)$. Nyt voidaan osoittaa, että

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}, \text{ kun } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

sillä

$$\psi(u) = \lim_{n \to \infty} \psi_n(u).$$

Täten voidaan olettaa väite kiinteälle n, missä $n \geq 1$, jolloin saadaan $\psi_n(u) \leq e^{-Ru}$. Seuraavaksi muodostetaan lauseke funktiolle ψ_{n+1}, ottaen huomioon ajan ja ensimmäisen vahingon määrän. Oletetaan, että ensimmäinen vahinko tapahtuu hetkellä $t > 0$ ja sen suuruus on x. Jos vararikko tapahtuu ennen $(n+1)$. vahinkoa, niin joko

1. vararikko tapahtuu ensimmäisen vahingon aikana, koska $x > u + ct$ tai
2. vararikko ei tapahdu ensimmäisen vahingon aikana, koska ylijäämä $u + ct - x$ tämän vahingon jälkeen on epänegatiivinen ja vararikko johtuu ylijäämän tasosta jonkin n. vahingon jälkeen.

Koska vahinkoja sattuu Poisson-prosessin mukaisesti, niin ensimmäisen vahingon ajanhetken jakauma on eksponentiaalinen parametrilla λ. Integroimalla kaikkien mahdollisten ensimmäisen vahingon ajanhetkien ja vahinkomäärien suhteen, saadaan

$$\psi_{n+1}(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f(x)dxdt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f(x)\psi_n(u + ct - x)dxdt,$$

missä ensimmäinen integraali kuvaa vararikkotodennäköisyyttä ensimmäisen vahingon aikana ja toinen integraali kuvastaa todennäköisyyttä sille, ettei vararikko tapahdu ensimmäisen vahingon aikana, mutta jollakin n seuraavasta vahingosta. Ylijäämäprosessi alkaa alusta aina ensimmäisen vahingon maksamisen jälkeen. Siten vararikkotodennäköisyys n. vahingon jälkeen on $\psi_n(u + ct - x)$.
Sovelletaan induktio-oletusta:

$$\psi_{n+1}(u) \leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f(x)dxdt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f(x)e^{-R(u+ct-x)}dxdt.$$

Koska $e^{-R(u+ct-x)} \geq 1$, kun $x \geq u + ct$, niin

$$\int_{u+ct}^\infty f(x)dx \leq \int_{u+ct}^\infty e^{-R(u+ct-x)} f(x)dx.$$

Siis

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(u) &\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty f(x)e^{-R(u+ct-x)}dxdt \\
&= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+cR)t} \int_0^\infty e^{Rx} f(x)dxdt \\
&= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+cR)t} \mathrm{M}_X(R)dt,
\end{aligned}$$

sillä $\lambda + cR = \lambda \mathrm{M}_X(R)$, ja $\psi_{n+1}(u) \leq e^{-Ru}$.
Lopuksi osoitetaan, että väite pätee, kun $n = 1$. Edeltävää päättelyä soveltamalla

saadaan

$$
\begin{aligned}
\psi_1(u) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f(x)dxdt \\
&\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^\infty f(x)e^{-R(u+ct-x)}dxdt \\
&\leq \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty f(x)e^{-R(u+ct-x)}dxdt \\
&= e^{-Ru},
\end{aligned}
$$

joten väite on todistettu. □

4.2 Selviämistodennäköisyys

Tämän alaluvun esitys pohjautuu pääsääntöisesti Dicksonin kirjan [3] lukuun 7. Tämän lisäksi lähteenä on käytetty Promislowin kirjaa [6], mikäli näin on mainittu.

Määritelmä 4.4. [6, s.174] Tarkastellaan diskreettiä tapausta, jossa vararikko tapahtuu jollakin hetkellä $T \in \{1, 2, \ldots\}$. Määritellään selviämisfunktio

$$s(t) = 1 - F(t) = \mathrm{P}(T > t).$$

Täten saadaan todennäköisyys sille, ettei vararikko ole vielä tapahtunut hetkeen t mennessä tai toisin sanoen *selviäminen* on tapahtunut hetkeen t asti.

Esimerkki 4.5. [6, s.174-175] Jos f on muuttujan T pistetodennäköisyysfunktio, niin saadaan

$$f(t) = s(t-1) - s(t). \tag{4.4}$$

Muuttujan T jakauma voidaan ilmaista vahingon intensiteetin funktiona

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{s(t-1)}.$$

Ehdollinen todennäköisyys sille, että vararikko tapahtuu hetken $t-1$ jälkeen hetkellä t, saadaan selviämistodennäköisyydestä hetkeen $t-1$ asti. Tämä pätee silloin, kun $s(t-1) > 0$, sillä jos olisi $s(t-1) = 0$, niin ei olisi mahdollista selviämistä tähän hetkeen saakka. Funktiot $f(t)$ ja $\lambda(t)$ kuvaavat molemmat vararikon todennäköisyyttä hetkeen t mennessä, mutta eri näkökulmista. Funktioiden ero voidaan havaita kirjoittamalla funktion λ määritelmä muotoon

$$f(t) = s(t-1)\lambda(t), \tag{4.5}$$

joka kuvastaa sitä, että vararikko hetkenä t koostuu kahdesta tapahtumasta. Ensinnäkin on tapahduttava selviäminen hetkeen $t-1$ saakka ja vararikon on tapahduttava hetkellä t. Kun λ tiedetään, voidaan helposti määritellä muut funktiot seuraavasti: Yhdistämällä lausekkeet (4.4) ja (4.5) funktiolle $f(t)$ saadaan

$$s(t) = s(t-1)(1-\lambda(t)).$$

Alkutilanteessa $s(0) = \mathrm{P}(T > 0) = 1$, jonka lisäksi tiedetään, että

$$s(1) = (1-\lambda(1)) \text{ ja } s(2) = (1-\lambda(1))(1-\lambda(2)) = (1-\lambda(1))(1-\lambda(2)).$$

Jatkamalla induktiivisesti saadaan

$$s(t) = (1-\lambda(1))(1-\lambda(2))\dots(1-\lambda(t)).$$

Esimerkki 4.6. [6, s.175-176] Määritellään selviämisfunktio jatkuvassa tapauksessa vastaavasti kuin diskreetissä tapauksessa, $s(t) = 1 - F(t) = \mathrm{P}(T > t)$, selviämistodennäköisyytenä hetkeen t asti. Tämä on yhteydessä selviämistodennäköisyyden tiheysfunktioon seuraavasti:

$$f(t) = -s'(t), \text{ missä } s(t) = \int_t^\infty f(r)dr = 1 - \int_0^t f(r)dr. \tag{4.6}$$

Määritellään riskifunktio μ jatkuvassa tapauksessa

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{s(t)} \tag{4.7}$$

kaikilla t, joilla $s(t) > 0$. Tämä on ehdollinen tiheysfunktio vararikolle hetkellä t, kun selviäminen tapahtuu tähän hetkeen asti. Kun väli $[t, t+\Delta t]$ on pieni, niin $\mu(t)\Delta t$, missä Δt on välin $[t, t+\Delta t]$ pituus, approksimoi todennäköisyyttä sille, että muuttujan T arvo on kyseisellä välillä, kun selviäminen tapahtuu hetkeen t asti. Analogisesti saadaan lauseke $f(t) = s(t)\mu(t)$. Muut arvot voidaan määrittää muuttujan μ perusteella yhtälöiden (4.6) ja (4.7) mukaisesti

$$\mu(t) = \frac{-s'(t)}{s(t)} = -\frac{d}{dt}(\log s(t)).$$

Tästä saadaan yhtälö

$$s(t) = e^{-\int_0^t \mu(r)dr}.$$

Määritelmä 4.7. Määritellään *selviämistodennäköisyys* todennäköisyytenä sille, ettei vararikko tapahdu koskaan. Olkoon $\phi(u) = 1 - \psi(u)$ selviämistodennäköisyys, missä u on ensimmäinen ylijäämä.

Esimerkki 4.8. Selviämistodennäköisyydelle ϕ voidaan muodostaa yhtälö soveltamalla päättelyä, jota käytettiin Lundbergin epäyhtälön todistamiseen. Ensimmäisen vahingon ajankohdan ja määrän perusteella saadaan

$$\phi(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} f(x)\phi(u+ct-x)dxdt, \tag{4.8}$$

kun ensimmäinen vahinko tapahtuu hetkellä t ja sen määrä ei ylitä määrää $u + ct$, sillä muutoin vararikko tapahtuu.

Sijoitetaan $s = u + ct$ yhtälöön (4.8) ja saadaan

$$\begin{aligned}\phi(u) &= \frac{1}{c}\int_u^\infty \lambda e^{-\lambda\frac{(s-u)}{c}} \int_0^s f(x)\phi(s-x)dxds \\ &= \frac{\lambda}{c}e^{\lambda\frac{u}{c}} \int_u^\infty e^{-\lambda\frac{s}{c}} \int_0^s f(x)\phi(s-x)dxds.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Muodostetaan yhtälö selviämistodennäköisyydelle ϕ derivoimalla yhtälöä (4.9). Saatua yhtälöä voidaan käyttää derivoidessa eksplisiittisiä ratkaisuja selviämistodennäköisyydelle ϕ. Derivoimalla saadaan

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\phi(u) &= \frac{\lambda^2}{c^2}e^{\lambda\frac{u}{c}} \int_u^\infty e^{-\lambda\frac{s}{c}} \int_0^s f(x)\phi(s-x)dxds - \frac{\lambda}{c}\int_0^u f(x)\phi(u-x)ds \\ &= \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u f(x)\phi(u-x)dx.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Eliminoimalla integroitava termi voidaan konstruoida differentiaaliyhtälö ja ratkaista se. Tarkastellaan tilannetta, jossa vahinkomäärän kertymäfunktio $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$. Tällöin saadaan

(4.11)

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}\phi(u) &= \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \alpha e^{-\alpha x}\phi(u-x)dx = \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\alpha\lambda}{c}\int_0^u e^{-\alpha(u-x)}\phi(x)dx \\ &= \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\alpha\lambda}{c}e^{-\alpha u}\int_0^u e^{\alpha x}\phi(x)dx.\end{aligned}$$

Derivoimalla yhtälöä (4.11) saadaan

$$\frac{d^2}{du^2}\phi(u) = \frac{\lambda}{c}\frac{d}{du}\phi(u) + \frac{\alpha^2\lambda}{c}e^{-\alpha u}\int_0^u e^{\alpha x}\phi(x)dx - \frac{\alpha\lambda}{c}\phi(u). \tag{4.12}$$

Integroitava termi yhtälössä (4.12) on yhtälön (4.11) integroitava termi kerrottuna muuttujalla $-\alpha$. Täten, jos yhtälö (4.11) kerrotaan muuttujalla α ja lisätään lopputulos yhtälöön (4.12), saadaan

$$\frac{d^2}{du^2}\phi(u) + \alpha\frac{d}{du}\phi(u) = \frac{\lambda}{c}\frac{d}{du}\phi(u)$$

eli

$$\frac{d^2}{du^2}\phi(u) + (\alpha - \frac{\lambda}{c})\frac{d}{du}\phi(u) = 0.$$

Tämä on toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, jonka yleinen ratkaisu on

$$\phi(u) = a_0 + a_1 e^{-(\alpha-\frac{\lambda}{c})u},$$

missä a_0 ja a_1 ovat vakioita. Lundbergin epäyhtälön perusteella tiedetään, että

$$\lim_{u\to\infty}\phi(u) = 1,$$

joten $a_0 = 1$. Tästä seuraa, että $\phi(0) = 1 + a_1$, eli $a_1 = \psi(0)$, joten

$$\phi(u) = 1 - \psi(0)e^{-(\alpha-\frac{\lambda}{c})u}.$$

Jäljelle jää ratkaista $\psi(0)$. Oletetaan, että Lundbergin epäyhtälö pätee. Sijoittamalla $\phi = 1 - \psi$ yhtälöön (4.10), saadaan

$$\frac{d}{du}\psi(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u f(x)\psi(u-x)dx - \frac{\lambda}{c}(1 - F(u)),$$

ja integroimalla tämä välillä $[0, \infty]$ saadaan

$$-\psi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(u)du - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty\int_0^u f(x)\psi(u-x)dxdu - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty(1-F(u))du. \tag{4.13}$$

Vaihtamalla integrointijärjestystä kaksinkertaisessa integraalissa saadaan

$$\int_0^\infty\int_0^u f(x)\psi(u-x)dxdu = \int_0^\infty\int_0^\infty \psi(u-x)duf(x)dx = \int_0^\infty\int_0^\infty \psi(y)dyf(x)dx = \int_0^\infty \psi(y)dy.$$

Koska yhtälön kaksi ensimmäistä termiä kumoutuvat, saadaan

$$\psi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty (1 - F(u))du = \frac{\lambda m_1}{c}. \tag{4.14}$$

Edellä esitellyssä ei tarvinnut määritellä funktiota F, mutta Lundbergin epäyhtälön oletettiin olevan voimassa. Yhtälö (4.14) kuitenkin pätee yleisesti. Täydellinen ratkaisu funktiolle ϕ, kun $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ ja $x \geq 0$, on

$$\phi(u) = 1 - \frac{\lambda}{\alpha c}e^{-(\alpha-\frac{\lambda}{c})u}, \tag{4.15}$$

sillä yksittäisen vahingon odotusarvo on $m_1 = \frac{1}{\alpha}$.
Klassisessa riskiprosessissa merkitään $R = \alpha - \frac{\lambda}{c}$ ja $\psi(u) = \psi(0)e^{-Ru}$. Kirjoitetaan maksutulo muodossa $c = (1+\theta)\lambda m_1$, jolloin oikaisukerroin ei riipu paramertista λ. Jos c kirjoitetaan vastaavasti yhtälöön (4.14), niin

$$\phi(u) = 1 - \frac{1}{1+\theta} e^{\frac{-\alpha\theta}{1+\theta}}$$

on riippumaton parametrista λ. Tämä riippumattomuus pätee jokaiselle yksittäiselle vahinkomäärän jakaumalle, ei vain eksponentiaaliselle jakaumalle.

Määritelmä 4.9. [6, s. 305] Tarkastellaan ajan suhteen diskreettiä ylijäämäprosessia. Olkoon T se hetki, jolloin ylijäämä ensimmäisen kerran on negatiivinen. Tätä sanotaan *vararikon ajanhetkeksi*. Diskreetissä tapauksessa merkitään $T = \min\{n \mid U_n < 0\}$. Mikäli ylijäämä on kaikissa tapauksissa epänegatiivinen, niin T on tällöin ∞, eli sen ei tarvitse olla reaalinen.

4.3 Laplace-muunnos

Tämän alaluvun esitys pohjautuu Dicksonin kirjan [3] lukuun 7.

Määritelmä 4.10. Olkoon $h(y)$ jatkuva reaalifunktio, joka on määritelty positiivisella reaalilukuakselilla ja jolle $\lim_{y\to\infty} h(y)e^{-\lambda y} = 0$ jollakin $\lambda > 0$. Tällöin muuttujan h *Laplace-muunnos* määritellään seuraavasti

$$h^*(s) = \int_0^\infty e^{-sy} h(y)dy.$$

Laplace-muunnoksella on seuraavat ominaisuudet:

1. Olkoot h_1 ja h_2 funktioita, joilla on olemassa Laplace-muunnos ja olkoon α_1 ja α_2 vakioita. Tällöin $\int_0^\infty e^{-sy}(\alpha_1 h_1(y) + \alpha_2 h_2(y))dy = \alpha_1 h_1^*(s) + \alpha_2 h_2^*(s)$.

2. Integraalin Laplace-muunnos: Olkoon h funktio, jolla on olemassa Laplace-muunnos ja olkoon $H(x) = \int_0^x h(y)dy$. Tällöin $H^* = \frac{h^*(s)}{s}$.

3. Derivaatan Laplace-muunnos: Olkoon h derivoituva funktio, jolla on olemassa Laplace-muunnos. Tällöin $\int_0^\infty e^{-sy}(\frac{d}{dy}h(y))dy = sh^*(s) - h(0)$.

4. Konvoluution Laplace-muunnos: Olkoon h_1 ja h_2 kuten kohdassa 1 ja määritellään $h(x) = \int_0^x h_1(y)h_2(x-y)dy$. Tällöin $h^*(s) = h_1^*(s)h_2^*(s)$.

5. Satunnaismuuttujan Laplace-muunnos: Olkoon H satunnaismuuttujan X kertymäfunktio. Oletetaan, että $H(0) = 0$. Tällöin $\mathrm{E}[e^{-sX}] = \int_0^\infty e^{-sy}dH(y)$. Kun jakauma on jatkuva kertymäfunktiolla h, niin tällöin $\mathrm{E}[e^{-sX}] = h^*(s)$.

4.4 Rekursiivinen laskenta

Tämän alaluvun esitys pohjautuu Dicksonin kirjan [3] lukuun 7.

Määritelmä 4.11. Oletetaan, että ϕ on yhdistetyn geometrisen satunnaismuuttujan kertymäfunktio. Tarkastellaan *yhdistettyä kuluprosessia* $(L(t))_{t\geq 0}$, joka määräytyy ehdosta $L(t) = S(t) - ct$ kaikilla $t \geq 0$ siten, että $U(t) = u - L(t)$. Määritellään satunnaismuuttuja L yhdistetyn kuluprosessin maksimina. Muuttuja L voidaan samaistaa muuttujaan ϕ seuraavasti:

$$\phi(u) = \mathrm{P}(U(t) \geq 0 \text{ kaikilla } t \geq 0) = \mathrm{P}(L(t) \leq u \text{ kaikilla } t \geq 0).$$

Täten ϕ on muuttujan L kertymäfunktio, ja koska $L(0) = 0$, niin L on epänegatiivinen satunnaismuuttuja. Edelleen, koska $\phi(0) = \mathrm{P}(L(t) = 0)$, niin muuttujalla L on yhdistetty jakauma, jonka todennäköisyysmassa on nollassa.

Lause 4.12. *Aiemmin määriteltiin yhtälö* (4.13) *arvolle* $\psi(0)$ *olettaen, että Lundbergin epäyhtälö on voimassa. Osoitetaan nyt, että tämä yhtälö pätee yleisesti, kun vahinkomäärän kertymäfunktiolle pätee* $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$.

Todistus. Tarkastellaan satunnaismuuttujan L Laplace-muunnosta L^*:

$$L^*(s) = \mathrm{E}[e^{-sL}] = \phi(0) + \int_0^\infty e^{-su}(\frac{d}{du}\phi(u))du.$$

Integroitava termi on funktion ϕ derivaatan Laplace-muunnos,

$$L^*(s) = \phi(0) + s\phi^*(s) - \phi(0) = s\phi^*(s) = \frac{cs\phi(0)}{cs - \lambda(1 - f^*(s))}. \tag{4.16}$$

Tiedetään, että $\lim_{s\to 0+} L^*(s) = \lim_{s\to 0+} \mathrm{E}[e^{-sL}] = 1$, ja $\lim_{s\to 0+} L^*(s)$ saadaan myös edellä olevasta yhtälöstä seuraavasti:

$$\lim_{s\to 0+} L^*(s) = \lim_{s\to 0+} \frac{cs\phi(0)}{cs - \lambda(\frac{d}{ds})f^*(s)}$$

käyttämällä L'Hospitalin sääntöä. Edelleen koska

$$\lim_{s\to 0+} \frac{d}{ds} f^*(s) = -\lim_{s\to 0+} \int_0^\infty ye^{-sy}f(y)dy = -m_1,$$

saadaan

$$1 = \frac{c\phi(0)}{c - \lambda m_1}$$

ja täten

$$\phi(0) = 1 - \frac{\lambda m_1}{c}.$$

Kiinnitetään nyt huomiota muuttujan L jakaumaan. Havaitaan, että yhdistetty kuluprosessi on nollaa suurempi vain, jos ylijäämä putoaa alle sen aloitustason, ja tämän todennäköisyys on $\psi(0)$. Oletetaan, että tämä tapahtuu ja ylijäämä putoaa tasolle $u - l_1$, missä $l_1 > 0$. Tällöin yhdistetty kuluprosessi saavuttaa korkeimman tasonsa l_1 tällä ajanhetkellä.
Todennäköisyys sille, että yhdistetty kuluprosessi saavuttaa toisen maksimipisteensä, on jälleen $\psi(0)$, sillä riittää, että ylijäämä putoaa alle tason $u - l_1$ jollakin tulevana ajan hetkenä. Tässä käytetään hyödyksi sitä tietoa, että yhdistetyllä Poisson-prosessilla on kiinteät ja riippumattomat lisäykset. Jos ylijäämä vielä putoaa alle tason $u - l_1$ ja pudotuksen määrä on $l_2 > 0$, niin uusi maksimi yhdistetylle kuluprosessille on $l_1 + l_2$ ja lisäys prosessin maksimiin on l_2. Jatkamalla tähän tapaan havaitaan, että todennäköisyys määrälle n lisäyksiä yhdistetyn kuluprosessin lakipisteessä on

$$\psi(0)^n \phi(0), \text{ kun } n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.17}$$

mikä on geometrisen jakauman pistetodennäköisyysfunktio. Edelleen maksimi yhdistetylle kuluprosessille on yksinkertaisesti lisäyksien summa prosessin lakipisteessä. Täten voidaan kirjoittaa L yhdistettynä geometrisena satunnaismuuttujana $L = \sum_{i=1}^{N} L_i$, missä N on lisäyksien määrä yhdistetyssä vahinkoprosessissa, jonka todennäköisyys saadaan yhtälöstä (4.17) ja L_i on i. lisäyksen määrä prosessissa. Koska yhdistetty kuluprosessi alkaa alusta joka kerta, kun se saavuttaa lakipisteensä, $(L_i)_{i=1}^{\infty}$ on jono riippumattomia ja riippumattomasti jakautuneita satunnaismuuttujia.
Käytetään Laplace-muunnosta muuttujan L_1 jakauman löytämiseksi. Olkoon $K(x) = \mathrm{P}(L_1 \le x)$ ja olkoon k siihen liittyvä intensiteettifunktio. Tällöin

$$\mathrm{E}(e^{-sL}) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(e^{-sL} \mid N)) = \mathrm{E}(k^*(s)^N),$$

missä $k^*(s) = \mathrm{E}(\exp(-sL_1))$. Edelleen, koska N on geometrisesti jakautunut, muuttujalla L on yhdistetty geometrinen jakauma, missä

$$\mathrm{E}(e^{-sL}) = \frac{\phi(0)}{1 - \psi(0)k^*(s)}. \tag{4.18}$$

On jo osoitettu, että

$$\mathrm{E}(e^{-sL}) = \frac{cs\phi(0)}{cs - \lambda(1 - f^*(s))},$$

ja yhtälöimällä nämä lausekkeet saadaan

$$\frac{cs\phi(0)}{cs - \lambda(1 - f^*(s))} = \frac{\phi(0)}{1 - \psi(0)k^*(s)},$$

mistä asettamalla $\psi(0) = \lambda \frac{m_1}{c}$ saadaan

$$k^*(s) = \frac{1}{m_1 s}(1 - F(x)).$$

Koska muuttujan L_1 jakauma on jatkuva, niin arvojen laskemiseksi funktiolle ϕ, tulisi tämä jakauma diskretisoida. Vaikka tämä lähestymistapa johtaa järkeviin approksimaatioihin funktiolle ϕ, parempi lähestymistapa on etsiä rajat funktiolle ϕ.

Rajojen saavuttamiseksi määritellään satunnaismuuttuja

$$L_\alpha = \sum_{i=1}^{N} L_{\alpha,i},$$

missä N on yläraja ja $(L_{\alpha,i})_{i=1}^{\infty}$ on jono riippumattomia, samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joilla kaikilla on kertymäfunktio K_α ja todennäköisyysfunktio

$$K_{\alpha,x} = K(x+1) - K(x), \text{ kun } x = 1, 2, \ldots .$$

Täten, kun $x \geq 0$, niin

$$K_\alpha(x) \geq K(x).$$

Vastaavasti määritellään satunnaismuuttuja

$$L_\beta = \sum_{i=1}^{N} L_{\beta,i},$$

missä N on yläraja ja $(L_{\beta,i})_{i=1}^{\infty}$ on jono riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joilla kaikilla on kertymäfunktio K_β ja todennäköisyysfunktio

$$K_{\beta,x} = K(x+1) - K(x), \text{ kun } x = 1, 2, \ldots .$$

Kun $x \geq 0$, niin $K_\beta(x) \geq K(x)$ ja yhtäsuuruus pätee, kun x on lisäys. Täten

$$K_\alpha(u) \geq K(u) \geq K_\beta(u).$$

Tiedetään, että järjestys säilyy konvoluutiossa, joten

$$K_\alpha^{n*}(u) \geq K(u)^{n*} \geq K_\beta(u)^{n*}.$$

Koska

$$\phi(u) = \phi(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi(0)^n \phi(0) K^{n*}(u),$$

niin

$$\mathrm{P}(L_\alpha \leq u) \geq \mathrm{P}(L \leq u) \geq \mathrm{P}(L_\beta \leq u)$$

ja

$$\mathrm{P}(L_\alpha < u) \geq \mathrm{P}(L < u) \geq \mathrm{P}(L_\beta < u).$$

Keskeistä yhtälöissä on, että kun $u > 0$, niin keskimmäinen termi jokaisessa on $\phi(u)$, mutta koska L_α ja L_β ovat diskreettejä satunnaismuuttujia, niin

$$\mathrm{P}(L_\alpha < u) < \mathrm{P}(L_\alpha \leq u)$$

ja

$$\mathrm{P}(L_\beta < u) < \mathrm{P}(L_\beta \leq u).$$

Täten voidaan sitoa $\phi(u)$, kun $u > 0$ seuraavasti:

$$P(L_\beta \leq u) \leq \phi(u) \leq P(L_\alpha < u).$$

Tämä pätee vain silloin, kun $u > 0$, sillä $L_{\alpha,1}$ ja $L_{\beta,1}$ ovat diskreettejä satunnaismuuttujia. Asetetaan $\phi_\alpha(u) = P(L_\alpha \leq u)$ ja $\phi_\beta(u) = P(L_\beta \leq u)$. Tällöin

$$\phi_\alpha(0) = \frac{\phi(0)}{1 - \psi(0)k_{\alpha,0}},$$

ja kun $u = 1, 2, \ldots$, niin

$$\phi_\alpha(u) = \frac{1}{1 - \psi(0)k_{\alpha,0}}(\phi(0) + \psi(0)\sum_{j=1}^{u} k_{\alpha,j}\phi_\alpha(u - j)).$$

Vastaavasti $\phi_\beta(0) = \phi(0)$, ja kun $u = 1, 2, \ldots$, niin

$$\phi_\beta(0) = \phi(0) + \psi(0)\sum_{j=1}^{u} k_{\beta,j}\phi(u - j).$$

□

4.4.1 Rekursiivinen laskenta epäjatkuvassa ajassa

Tämän alaluvun esitys pohjautuu Dicksonin kirjan [3] lukuun 7.

Huomautus 4.13. Diskreetin riskimallin mukaisesti voidaan määrittää yhtälöt sekä lopulliselle että äärellisen ajan vararikkotodennäköisyydelle, joita kumpaakin voidaan käyttää klassisessa riskimallissa vararikkotodennäköisyyden arvoimiseksi.

Klassisessa riskimallissa määritellään approksimointiproseduuri äärellisen ajan vararikkotodennäköisyydelle seuraavasti:

$$\psi(u, t) = P(u + cs - \sum_{i=1}^{N(s)} X_i < 0 \text{ jollakin } s, 0 < s \leq t),$$

missä kiinteälle arvolle s pätee $N(s) \sim \mathcal{PN}(\lambda s)$.

Kirjoitetaan nyt $c = (1 + \theta)\lambda m_1$ ja asetetaan $\lambda = m_1 = 1$, sillä rahamäärä kuvaa keskimääräistä yksittäistä vahinkomäärää ja aikayksikkö kuvaa sitä hetkeä, jolloin vahinko on odotettavissa. Näin saadaan skaalattua parametrit approksimointiproseduurin muodostamista varten. Muodostetaan kolmivaiheinen approksimointiproseduuri seuraavasti:

1. Korvataan muuttuja X_i, missä $i = 1, 2, 3, \ldots$, muuttujalla $X_{1,i}$, missä $X_{1,i}$ on diskreetti satunnaismuuttuja, joka on jakautunut seuraavasti; $0, \frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}, \ldots$, missä $\beta > 0$. Muuttujan $X_{1,i}$ jakauma tulee valita siten, että se on hyvä approksimaatio muuttujan X_i jakaumalle. Määritellään

   $$\psi_1(u, t) = P(u + (1 + \theta)s - \sum_{i=1}^{N(s)} X_{1,i} < 0 \text{ jollaikin } s, 0 < s \leq t).$$

   Tällöin funktio $\psi_1(u, t)$ on hyvä approksimaatio funktiolle $\psi(u, t)$.

2. Määritellään

$$X_{2,i} = \beta X_{1,i}, \text{ kun } i = 1, 2, 3, \ldots$$

ja

$$\psi_2(\omega, t) = \mathrm{P}(\omega + (1+\theta)\beta s - \sum_{i=1}^{N(s)} X_{2,i} < 0 \text{ jollaikin } s, 0 < s \leq t).$$

Tällöin saadaan

$$\psi_2(\beta u, t) = \psi_1(u, t).$$

3. Muutetaan nyt aikaskaalaa vaihtamalla Poisson-prosessin parametriksi $\frac{1}{(1+\theta)\beta}$. Tämä tarkoittaa sitä, että maksutulo aikayksikköä kohden on 1, ja täten voidaan kirjoittaa

$$\psi_3(\omega, t) = \mathrm{P}(\omega + s - \sum_{i=i}^{N^*(s)} X_{2,i} < 0 \text{ jollakin } 0 < s \leq t), \tag{4.19}$$

missä kiinteällä arvolla s, $N^*(s)$ on Poisson-jakautunut keskiarvolla $\frac{s}{(1+\theta)\beta}$. Tällöin

$$\psi_3(\omega, (1+\theta)\beta t) = \psi_2(\omega, t)$$

ja edelleen

$$\psi(u, t) \approx \psi_3(u\beta, (1+\theta)\beta t).$$

Funktiosta $\psi_3(u, t)$ saadaan vararikon todennäköisyys jatkuvassa ajassa diskreeteillä yksittäisillä vahinkomäärillä. Tätä voidaan approksimoida diskreetin ajan vararikkotodennäköisyydellä. Aloitetaan kirjoittamalla uudelleen funktion $\psi_d(u, t)$ määritelmä seuraavasti

$$\psi_d(u, t) = \mathrm{P}(u + n - \sum_{i=1}^{n} S_i \leq 0 \text{ jollakin } n = 1, 2, 3, \ldots, t), \tag{4.20}$$

missä S_i edustaa kertynyttä vahinkomäärää i. aikajaksossa. Kun muuttujalla S_i on yhdistetty Poisson-prosessi Poisson-parametrilla $\frac{1}{(1+\theta)\beta}$ ja yksittäiset vahinkomäärät, jotka ovat jakautuneet kuten $X_{2,i}$, yhtälöstä (4.20) saadaan diskreetin ajan vararikkotodennäköisyys, joka vastaa yhtälöä (4.19). Täten approksimaatio funktiolle $\psi(u, t)$ on $\psi_d(u\beta, (1+\theta)\beta t)$ ja vastaavasti approksimaatio funktiolle $\psi(u)$ on $\psi_d(u\beta)$. Jos approksimoidaan jatkuvan ajan vararikkotodennäköisyyttä diskreetin ajan vararikkotodennäköisyydellä, voidaan approksimaation olettaa olevan hyvä, jos ylijäämän tarkistuspisteiden aikaväli on pieni. Tässä approksimaatiossa voidaan saavuttaa tämä valitsemalla suuri muuttujan β arvo.

4.4.2 Vararikon approksimatiivinen laskenta

Tämän alaluvun esitys pohjautuu Dicksonin kirjan [3] lukuun 7.

Esimerkki 4.14. Tarkastellaan yksinkertaista riskiprosessia $(U(t))_{t\geq 0}$, jolle halutaan laskea lopullisen vararikon todennäköisyys. Riskiprosessia voidaan approksimoida klassisella riskiprosessilla $(\tilde{U}(t))_{t\geq 0}$, jolla on seuraavat ominaisuudet:

1. $\tilde{U}(0) = u$
2. Poisson-parametri on $\tilde{\lambda}$
3. maksutulo aikayksikköä kohden on $\tilde{c}$ ja
4. yksittäisen vahingon määrän tiheysfunktio on $\tilde{F}(x) = 1 - e^{-\tilde{\alpha}x}$, missä $x \geq 0$.

Koska yksittäisen vahingon määrän jakauma approksimoidussa riskiprosessissa on eksponentiaalinen parametrilla $\tilde{\alpha}$, niin yhtälöstä (4.15) seuraa välittömästi, että riskiprosessin $(U(t))_{t\geq 0}$ lopullisen vararikon todennäköisyys on

$$\psi(u,t) = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}\tilde{c}} e^{-(\tilde{\alpha} - \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{c}})u}.$$

Tämä on De Vylderin approksimaatio riskiprosessin $(U(t))_{t\geq 0}$ lopulliselle vararikkotodennäköisyydelle. Parametrit $\tilde{\lambda}$, $\tilde{c}$ ja $\tilde{\alpha}$ on valittu ylijäämäprosessin vastaavien hetkien perusteella. Ensin asetetaan

$$\mathrm{E}[U(t)] = \mathrm{E}[\tilde{U}(t)],$$

mistä saadaan

$$u + ct - \lambda m_1 t = u + \tilde{c}t - \frac{\tilde{\lambda}t}{\tilde{\alpha}}$$

tai

$$\tilde{c} = c - \lambda m_1 + \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}}. \tag{4.21}$$

Seuraavaksi asetetaan

$$\mathrm{E}[(U(t) - \mathrm{E}[U(t)])^2] = \mathrm{E}[(\tilde{U}(t) - \mathrm{E}[\tilde{U}(t)])^2]$$

ja koska

$$U(t) - \mathrm{E}[U(t)] = -S(t) + \lambda m_1 t,$$

niin tämä on ekvivalentti asetuksen

$$V[S(t)] = V[\tilde{S}(t)]$$

kanssa, missä $(\tilde{S}(t))_{t\geq 0}$ tarkoittaa kertynyttä riskiprosessia approksimoidussa prosessissa $(\tilde{U}(t))_{t\geq 0}$, josta saadaan

$$\lambda m_2 = \frac{2\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}^2}. \tag{4.22}$$

Kolmanneksi asetetaan

$$\mathrm{E}[(U(t) - \mathrm{E}[U(t)])^3] = \mathrm{E}[(\tilde{U}(t) - \mathrm{E}[\tilde{U}(t)])^3],$$

mikä on ekvivalentti asetuksen

$$Sk[S(t)] = Sk[\tilde{S}(t)]$$

kanssa, mistä saadaan

$$\lambda m_3 = \frac{6\tilde{\lambda}}{\tilde{\alpha}^3}. \tag{4.23}$$

Yhtälöistä (4.22) ja (4.23) saadaan

$$\tilde{\alpha} = \frac{3m_2}{m_3} \tag{4.24}$$

ja korvaamalla $\tilde{\alpha}$ yhtälöstä (4.22) saadaan

$$\tilde{\lambda} = \frac{9\lambda m_2^3}{2m_3^2}. \tag{4.25}$$

Viimeinen vaihe on saavuttaa $\tilde{c}$ sijoittamalla lausekkeet (4.24) ja (4.25) muuttujien $\tilde{\alpha}$ ja $\tilde{\lambda}$ paikalle yhtälöön (4.21). De Vylderin approksimaation soveltamiseen vaaditaan, että ensimmäiset kolme yksittäistä vahinkohetkeä ovat olemassa. Tilanteissa, joissa oikaisukerroin on olemassa, metodilla yleensä saadaan hyvä approksimaatio, kun vararikkotodennäköisyydet ovat pieniä, kuten alle 5%. Approksimaatio on kuitenkin epätarkka pienillä muuttujan u arvoilla, etenkin, kun $u = 0$, mutta sellaiset arvot ovat käytännössä mielenkiinnottomia, kun vararikon todennäköisyys on suuri. Yleisesti metodi ei ole kovin tarkka, sillä se ei huomioi oikaisukerrointa.

5 Edistynyt vararikkoteoria

Tässä luvussa käsitellään edellistä lukua syvemmin vararikkoteoriaa. Aloitetaan esittelemällä vararikon rajaongelma, joka kuvaa sitä, että vararikko tapahtuu, kun ylijäämäprosessi saavuttaa niin matalan tason, että vakuuttaja ei pysty enää selviämään vastuistaan. Tämän tason määrittäminen on tärkeää, jotta tiedettäisiin, kuinka paljon varallisuutta yhtiöllä tulee olla vähimmillään, jotta vararikolta vältyttäisiin. Tämän jälkeen tarkastellaan vararikon vakavuutta, joka kuvaa sitä, kuinka lopullinen vararikko voi johtua suoraan siitä, että ylijäämä jää alle tietyn tason tai myöhemmin tästä matalasta ylijäämän tasosta. Luvussa tarkastellaan myös ylijäämää ennen vararikkoa, eli tarkastellaan sitä, mikä on todennäköisyys sille, että jokin ylijäämän alkutaso ei ole riittävä, vaan ylijäämä putoaa alle sellaisen tason, että vararikko tapahtuu. Viimeisimpänä tarkastellaan vararikon ajanhetkeä, eli etsitään todennäköisyys sille, että vararikko tapahtuu tiettyyn hetkeen mennessä. Vararikon ajanhetki kertoo sen, milloin vararikon voidaan odottaa tapahtuvan. Tämän avulla voidaan ennustaa, kuinka kauan alkuvarallisuus riittää kattamaan korvausvastuun, jolloin osataan varautua tilanteeseen ja mahdollisesti välttää vararikko.

Tämän luvun esitys alalukuineen pohjautuu Dicksonin kirjan [3] lukuun 8.

5.1 Rajaongelma

Tarkastellaan vararikkoa klassisessa riskimallissa. Oletetaan, että vakuuttajan ylijäämä alussa on u. Tarkastellaan todennäköisyyttä sille, että vararikko tapahtuu ilman, että ylijäämäprosessi saavuttaa tasoa $b > u$.

Merkitään $\xi(u, b)$ todennäköisyyttä sille, että vararikko tapahtuu alkutilanteesta u ilman, että ylijäämäprosessi saavuttaa tasoa $b > u$ ja $\chi(u, b)$ todennäköisyyttä sille, että ylijäämäprosessi saavuttaa tason b, ennen kuin ylijäämäprosessi putoaa alle nollatason.

Lause 5.1. *Klassisessa riskimallissaa pätee $\xi(u, b) + \chi(u, b) = 1$. Toisin sanoen, lähes varmasti ylijäämäprosessi joko saavuttaa tason b tai putoaa nollatasolle.*

Todistus. Oletetaan alkuylijäämän olevan u. Tarkastelaan tilannetta, jossa vararikko tapahtuu ja ylijäämäprrosessi ei saavuta tasoa $b > u$ ennen vararikkoa. Eli toisin sanoen tarkastellaan todennäköisyyttä sille, että vararikko tapahtuu, kun sillä on absorboiva raja arvossa b. Merkitään tätä todennäköisyyttä $\xi(u, b)$, ja $\chi(u, b)$ todennäköisyyttä, että ylijäämäprosessi saavuttaa tason b alkutilanteesta u ilman, että se ensin putoaa alle nollan. Jotta saadaan muodostettua lausekkeet muuttujille $\xi(u, b)$ ja $\chi(u, b)$, tarkastellaan lopullisen vararikon ja selviämisen todennäköisyyksiä erikseen rajoittamattomassa ylijäämäprosessissa.

Tarkastellaan ensin tapausta, jossa ylijäämäprosessi saavuttaa tason $b > u$ ennen vararikkoa. Tällöin alaluvussa 4.2 esitelty selviäminen tapahtuu alkutilanteesta u, jota merkitään $\phi(u)$ ja ylijäämäprosessin tulee käydä läpi taso $b > u$ jollain ajanhetkellä.

Alaluvussa 3.3 mainittiin, että mikäli maksutulo aikayksikköä kohden ei ylitä odotettujen vahinkojen kokonaismäärää, niin $\psi(u) = 1$ kaikilla $u \geq 0$. Koska oletettiin selviämisen tapahtuvan, kunnes taso $b > u$ saavutetaan, voidaan olettaa, että ehto $c > \lambda m_1$ pätee. Tällöin $U(t) \to \infty$, kun $t \to \infty$. Ajan jakauma seuraavaan vahinkoon siitä, kun ylijäämä saavuttaa tason b on eksponentiaalinen, joten ylijäämäprosessin todennäköinen käyttäytyminen siitä lähtien, kun se saavuttaa tason b, on riippumaton sen käyttäytymisestä ennen tason b saavuttamista. Tällöin

$$\phi(u) = \chi(u, b)\phi(b)$$

tai ekvivalentisti

$$\chi(u, b) = \frac{1 - \psi(u)}{1 - \psi(b)}.$$

Tarkastellaan sitten tapausta, jossa ylijäämäprosessi ei saavuta tasoa $b > u$. Tällöin vararikko tapahtuu ylijäämän alkutilanteesta u siten, että ylijäämäprosessi ei saavuta tasoa b ennen vararikkoa. Tällöin

$$\psi(u) = \xi(u, b) + \chi(u, b)\psi(b)$$

siten, että

$$\xi(u, b) = \psi(u) - \frac{1 - \psi(u)}{1 - \psi(b)}\psi(b) = \frac{\psi(u) - \psi(b)}{1 - \psi(b)}.$$

Havaitaan, että

$$\xi(u, b) + \chi(u, b) = 1,$$

joten lopulta vararikko tapahtuu joko ilman, että ylijäämäprosessi saavuttaa tasoa b tai siten, että ylijäämäprosessi saavuttaa tason b. □

5.2 Vararikon vakavuus

Tarkastellaan vararikon vakavuutta eli suurinta vakuuttajan alijäämää, ennen kuin ylijäämäprosessi toipuu nollatasolle.

Määritelmä 5.2. Määritellään vararikkohetki T_u alkuylijäämälle u seuraavasti:

$$T_u = \inf\{t \mid U(t) < 0\},$$

missä $T_u = \infty$, jos $U(t) \geq 0$ kaikilla $t > 0$. Täten

$$\psi(u) = \mathrm{P}(T_u < \infty).$$

Määritellään nyt

$$G(u, y) = \mathrm{P}(T_u < \infty \text{ ja } U(T_u) \geq -y),$$

mikä on todennäköisyys sille, että vararikko tapahtuu ja vakuuttajan alijäämä tai vararikon vakavuus on vähintään $-y$.

Lause 5.3. *Funktion $G(u, y)$ Laplace-muunnokselle $G^*(s, y)$ pätee $G^*(s, y) = \frac{\psi(0)U^*(s,y)}{1-\psi(0)k^*(s)}$.*

Todistus. Kyseessä on määritelmässä 3.7 määritetty lopullisen vararikon todennäköisyys äärellisessä ajassa, joten

$$\lim_{y \to \infty} G(u, y) = \psi(u)$$

siten, että

$$\frac{G(u, y)}{\psi(u)} = \mathrm{P}(|U(T_u)| \leq y \mid T_u < \infty)$$

on sopiva kertymäfunktio. Täten määrätylle ylijäämäfunktiolle u, $G(u, \cdot)$ on vaillinainen kertymäfunktio, jolla on vaillinainen tiheysfunktio

$$g(u, y) = \frac{\partial}{\partial y} G(u, y).$$

Jotta G saataisiin ratkaistua Laplace-muunnoksen avulla, tarvitaan lauseke funktiolle $g(0, y)$. Tämä voidaan konstruoida käyttämällä hyödyksi sitä tietoa, että vahinkomäärällä ensimmäisessä kertyneen vahinkoprosessin lakipisteessä, olettaen että tällainen on olemassa, on intesiteettifunktio

$$k(x) = \frac{1}{m_1}(1 - F(x)), \tag{5.1}$$

missä m_1 on vahinkomäärän ensimmäinen momentti ja $F(x)$ vahinkomäärän kertymäfunktio. Tiedetään myös, että todennäköisyys ensimmäiselle lakipisteelle kertyneessä vahinkoprosessissa on $\psi(0)$. Tästä seuraa, että

$$k(y) = \frac{g(0, y)}{\psi(0)}$$

siten, että

$$g(0, y) = \frac{\lambda}{c}(1 - F(y)).$$

Kirjoitetaan nyt lauseke funktiolle $G(u, y)$. Mikäli vararikko tapahtuu ja alijäämä prosessin lakipisteessä on y, niin ensimmäisessä tapauksessa, kun ylijäämä putoaa alle alkuperäisen tason u, niin joko

1. ylijäämä putoaa tasolle $u - x$, missä $x \geq 0$ siten, että vararikko myöhemmin johtuu tästä ylijäämän tasosta, jossa alijäämä on korkeintaan y tai
2. vararikko johtuu tästä pudotuksesta, jossa alijäämä on korkeintaan y.

Kirjoitetaan $G(u, y)$ muotoon

$$G(u, y) = \int_0^u g(0, x) G(u - x, y) dx + \int_u^{u+y} g(0, x) dx \tag{5.2}$$

$$= \psi(0) \int_0^u k(x) G(u - x, y) dx + \psi(0) U(u, y), \tag{5.3}$$

missä

$$U(u,y) = \int_u^{u+y} k(x)dx = K(u+y) - K(u).$$

Oletetaan nyt, että

$$G^*(s,y) = \int_0^\infty e^{-su} G(u,y)du$$

ja

$$U^*(s,y) \int_0^\infty e^{-su} U(u,y)du.$$

Käytetään sitten Laplace-muunnosta kaavaan (5.3), jotta saadaan integraali esitettyä vararikkotodennäköisyyden avulla. Saadaan

$$G^*(s,y) = \frac{\psi(0)U^*(s,y)}{1-\psi(0)k^*(s)}.$$

□

5.2.1 Vararikon maksimaalinen vakavuus

Lause 5.4. *Tarkastellaan laajemmin vararikon maksimaalista vakavuutta. Vararikon maksimaalisen vakavuuden kertymäfunktiolle $J_u(z)$ pätee*

$$J_u(z) = \frac{\psi(u) - \psi(u+z)}{\psi(u)(1-\psi(z))}.$$

Todistus. Sallitaan ylijäämäprosessin jatkua, mikäli vararikko tapahtuu. Tarkastellaan vararikon maksimaalista vakavuutta vararikon sattumishetkestä siihen asti, kunnes ylijäämäprosessi seuravan kerran saavuttaa nollatason. Oletetaan, että maksutulolle pätee $c > \lambda m_1$. Tällöin tiedetään, että ylijäämäprosessi saavuttaa tämän tason. Oletetaan muuttujan T'_u olevan ensimmäinen ajanhetki, jolloin ylijäämäprosessi saavuttaa nollatason vararikon tapahtumisen jälkeen. Määritellään muuttuja M_u vararikon maksimaaliselle vakavuudelle seuraavasti:

$$M_u = \sup\{|U(t)|, T_u \leq t \leq T'_u\}.$$

Olkoon

$$J_u(z) = \mathrm{P}(M_u \leq z \mid T_u < \infty)$$

muuttujan M_u kertymäfunktio, olettaen että vararikko tapahtuu. Vararikon maksimaalinen vakavuus on korkeintaan z, jos vararikko tapahtuu alijäämällä $y \leq z$ ja jos ylijäämä ei putoa alle tason $-z$ tasosta $-y$ ilman, että se putoaa alle tason 0. Täten

$$J_u(z) = \int_0^z \frac{g(u,y)}{\psi(u)} \chi(z-y,z)dy = \frac{1}{\psi(u)\phi(z)} \int_0^z g(u,y)\phi(z-y)dy.$$

Tätä voidaan arvioida lausekkeella

$$\psi(u+z) = \int_z^\infty g(u,y)dy + \int_0^z g(u,y)\psi(z-y)dy. \tag{5.4}$$

Mikäli vararikko tapahtuu lähtötilanteesta, jossa ylijäämä on $u+z$, niin ylijäämäprosessin on pudottava alle tason z jollain tulevalla ajanhetkellä. Jaetaan tämä tapauksiin, joissa joko vararikko tapahtuu tämän pudotuksen aikana, minkä todennäköisyys saadaan ensimmäisestä integraalista, tai vararikko tapahtuu myöhemmällä ajanhetkellä, minkä todennäköisyys saadaan toisesta integraalista. Täten saadaan yhtälö (5.4) arvolle $\psi(u+z)$. Havaitaan, että $\psi = 1 - \phi$ ja kirjoitetaan yhtälö (5.4) muodossa

$$\int_0^z g(u,y)\phi(z-y)dy = \int_z^\infty g(u,y)dy + \int_0^z g(u,y)dy - \psi(u+z) = \psi(u) - \psi(u+z).$$

Täten

$$J_u(z) = \frac{\psi(u) - \psi(u+z)}{\psi(u)(1-\psi(z))}.$$

□

5.3 Ylijäämä ennen vararikkoa

Tarkastellaan ylijäämän jakaumaa välittömästi ennen vararikkoa. Aiemmin merkittiin aikaa välittömästi ennen vararikkoa notaatiolla T_u^-. Merkitään nyt muuttujalla $U(T_u^-)$ ylijäämäprosessin tasoa välittömästi ennen sen vahingon maksamista, joka aiheuttaa vararikon.

Määritelmä 5.5. Tarkastellaan vararikkoa edeltävää ylijäämää, kun ylijäämän alkutaso on u. Todennäköisyys sille, että käytettävissä oleva varallisuus ennen vararikkoa on alle tason x ja ylijäämäprosessi ei alita tasoa x ennen vararikkoa on

$$W(u,x) = \mathrm{P}(T_u < \infty \text{ ja } U(T_u^-) < x).$$

Lause 5.6. *Ylijäämälle välittömästi ennen vararikkoa pätee*

$$\begin{cases} W(u,x) = \dfrac{1-G(0,x)}{1-\psi(0)}\psi(u) - \dfrac{\psi(0)-G(0,x)}{1-\psi(0)}, & \textit{kun } 0 \le u \le x \\ W(u,x) = G(u-x,x) - \dfrac{1-G(0,x)}{1-\psi(0)}(\psi(u-x)-\psi(u)), & \textit{kun } u \ge x. \end{cases}$$

Todistus. Vararikkotodennäköisyyttä kuvaava funktio $W(u,x)$ on vaillinainen kertymäfunktio, sillä $\mathrm{P}(T_u < 1) < 1$. Tarkasteltavassa tapauksessa käytettävissä oleva varallisuus välittömästi ennen vararikkoa on vähemmän kuin vararikon aiheuttaman vahingon vahinkomäärä. Kun $0 \le u < x$, niin vararikko saattaa johtua muusta kuin siitä, että ylijäämä ennen vararikkoa on alle x ensimmäisessä tapauksessa, kun ylijäämä putoaa alle sen alkutason, mutta kun $u \ge x$, niin se ei voi johtua muusta.

Tarkastellaan tapauksia $0 \leq u < x$ ja $u \geq x$ erikseen.
Tarkastellaan ensin tapausta, jossa $0 \leq u < x$. Mikäli ylijäämäprosessi ei koskaan saavuta tasoa x, niin vararikon täytyy tapahtua, kun ylijäämä ennen vararikkoa on alle tason x. Tarkastellaan sitä, saavuttaako ylijäämäprosessi tasoa x vai ei. Merkitään tätä

$$W(u,x) = \xi(u,x) + \chi(u,x)W(x,x), \tag{5.5}$$

missä funktiot ξ ja χ ovat kuten lauseessa 5.1.
Tarkastellaan sitten tilannetta, jossa $u = x$. Mikäli ylijäämä ennen vararikkoa on alle tason x, niin ensimmäisessä tapauksessa, jossa yljäämä putoaa alle sen lähtötason, sen on pudottava jollekin tasolle välillä $[0, x]$. Muutoin vararikko tapahtuu ensimmäisellä hetkellä, kun ylijäämä alittaa lähtötason siten, että ylijäämä ennen vararikkoa on vähintään x. Ehdollistamalla ensimmäisen pudotuksen määrää alkutilanteesta saadaan

$$W(x,x) = \int_0^x g(0,y)W(x-y,x)dy. \tag{5.6}$$

Koska tiedetään muoto jakaumalle $W(u,x)$, kun $u < x$, niin tämä voidaan sijoittaa edeltävään yhtälöön ja tällöin saadaan

$$W(x,x) = \int_0^x g(0,y)(\xi(x-y,x) + \chi(x-y,x)W(x,x))dy$$

ja järjestämällä uudelleen tämä vastaavuus, saadaan

$$W(x,x) = \frac{\int_0^x g(0,y)\xi(x-y,x)dy}{1 - \int_0^x g(0,y)\chi(x-y,x)dy}. \tag{5.7}$$

Yksinkertaistetaan yhtälöä (5.7). Kun $y \to \infty$, niin yhtälöstä (5.2) saadaan
(5.8)

$$\psi(u) = \int_0^u g(0,y)\psi(u-y)dy + \int_u^\infty g(0,y)dy = \int_0^u g(0,y)\psi(u-y)dy + \psi(0) - G(0,u)$$

siten, että

$$\int_0^u g(0,y)\psi(u-y)dy = \psi(u) - \psi(0) + G(0,u).$$

Täten yhtälön (5.7) oikean puolen osoittaja voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$\begin{aligned}\int_0^x g(0,y)\xi(x-y,x)dy &= \int_0^x g(0,y)\frac{\psi(x-y)-\psi(x)}{1-\psi(x)}dy \\ &= \frac{\psi(x)-\psi(0)+G(0,x)-\psi(x)G(0,x)}{1-\psi(x)}\end{aligned}$$

ja integraali nimittäjässä voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$\int_0^x g(0,y)\chi(x-y,x)dy = \int_0^x g(0,y)\frac{1-\psi(x-y)}{1-\psi(x)}dy = \frac{G(0,x)-\psi(x)+\psi(0)-G(0,x)}{1-\psi(x)}.$$

Täten saadaan

$$W(x,x) = \frac{\psi(x)-\psi(0)+G(0,x)-\psi(x)G(0,x)}{1-\psi(0)}. \tag{5.9}$$

Yhtälöiden (5.5) ja (5.9) perusteella saadaan

$$W(u,x) = \frac{1-G(0,x)}{1-\psi(0)}\psi(u) - \frac{\psi(0)-G(0,x)}{1-\psi(0)}, \tag{5.10}$$

kun $0 \leq u < x$. Erityisesti, kun $u = 0$, saadaan yhtäpitävyys $W(0,x) = G(0,x)$. Tarkastellaan sitten tapausta $u > x$. Vastaavasti kuin tapauksessa $u = x$, kun ylijäämä ennen vararikkoa on alle x, niin täytyy olla olemassa ensimmäinen tapaus, kun ylijäämä putoaa alle tason x, ja tämän pudotuksen määrä alle tason x ei voi ylittää määrää x. Todennäköisyys sille, että ylijäämä putoaa tasolta u tasolle, joka on välillä $[x,0]$, on sama kuin todennäköisyys sille, että vararikko tapahtuu ylijäämän lähtötasosta $u-x$, kun alijäämä vararikossa on korkeintaan x. Täten voidaan kirjoittaa

$$W(u,x) = \int_0^x g(u-x,y)W(x-y,x)dy. \tag{5.11}$$

Vastaavasti kuin tapauksessa $u = x$, voidaan sijoittaa $W(x-y,x)$ yhtälöön (5.11), mutta nyt käyttämällä yhtälöä (5.10) saadaan

$$W(u,x) = \frac{1-G(0,x)}{1-\psi(0)}\int_0^x g(u-x,y)\psi(x-y)dy - \frac{\psi(0)-G(0,x)}{1-\psi(0)}G(u-x,x). \tag{5.12}$$

Integroitavan termin arvioimiseksi havaitaan, että jokaiselle $x < u$ lopullisen vararikon todennäköisyys $\psi(u)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$\psi(u) = \int_0^x g(u-x,y)\psi(x-y)dy + \int_x^\infty g(u-x,y)dy.$$

Näin voidaan kirjoittaa, sillä vararikko tapahtuu toisella kahdesta tavasta. Joko ylijäämä putoaa alle tason x ensimmäistä kertaa, ei kuitenkaan määrää x enemmän, tasolle $x-y$ ja vararikko tapahtuu myöhemmin johtuen tästä pudotuksesta, tai ylijäämä putoaa alle tason x ensimmäisen kerran ja pudotuksen määrä on yli x, mistä vararikko johtuu. Täten

$$\int_0^x g(u-x,y)\psi(x-y)dy = \psi(u) - \int_x^\infty g(u-x,y)dy = \psi(u)-\psi(u-x)+G(u-x,x).$$

Sijoittamalla tämä lauseke yhtälöön (5.12) saadaan lopulta

$$W(u,x) = G(u-x,x) - \frac{1-G(0,x)}{1-\psi(0)}(\psi(u-x) - \psi(u)), \tag{5.13}$$

kun $u > x$. Koska yhtälö (5.9) toteuttaa molempien yhtälöiden (5.10) ja (5.13) ehdot, voidaan yllä olevat tulokset tiivistää seuraavasti:

$$W(u,x) = \frac{1-G(0,x)}{1-\psi(0)}\psi(u) - \frac{\psi(0)-G(0,x)}{1-\psi(0)}, \tag{5.14}$$

kun $0 \leq u \leq x$ ja

$$W(u,x) = G(u-x,x) - \frac{1-G(0,x)}{1-\psi(0)}(\psi(u-x) - \psi(u)), \tag{5.15}$$

kun $u \geq x$. Täten vaillinainen kertymäfunktio vararikkoa edeltävälle ylijäämälle on ilmaistu lopullisen vararikon todennäköisyyden ja vaillinaisen kertymäfunktion termeillä. □

Tarkastellaan vaillinaista intensiteettifunktiota

$$w(u,x) = \frac{\partial}{\partial x}W(u,x).$$

Havaitaan, että vaikka funktio W on jatkuva, kun $u = x$, niin se ei ole derivoituva ja siksi funktiota w tarkastellessa tulee tarkastella erikseen tapauksia $u < x$ ja $u > x$. Kun $u < x$, saadaan $w(u,x)$ suoraviivaisesti derivoimalla yhtälöä (5.14). Täten

$$w(u,x) = g(0,x)\frac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)},$$

ja koska $W(0,x) = G(0,x)$ ja $w(0,x) = g(0,x) = \frac{\lambda}{c}(1-F(x))$, missä $F(x)$ on vararikon ajanhetken kertymäfunktio, saadaan

$$w(u,x) = \frac{\lambda}{c}(1-F(x))\frac{1-\psi(u)}{1-\psi(0)}.$$

Kun $u > x$, derivoimalla yhtälöä (5.15) saadaan

$$w(u,x) = \frac{\partial}{\partial x}G(u-x,x) + g(0,x)\frac{\psi(u-x)-\psi(u)}{1-\psi(0)} - \frac{1-G(0,x)}{1-\psi(0)}\frac{\partial}{\partial x}\psi(u-x). \tag{5.16}$$

Tämä yhtälö yksinkertaistuu huomattavasti derivoimalla funktiota G. Tämän lausekkeen perusteella $G(u-x,x)$ voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$G(u-x,x) = \psi(0)(K(u) - K(u-x)) + \sum_{n=1}^{\infty}\psi(0)^{n+1}\int_0^{u-x} k^{n*}(s)\int_{u-x-s}^{u-s} k(z)dzds$$

ja täten

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}G(u-x,x)\\
&=\psi(0)k(u-x)-\sum_{n=1}^{\infty}\psi(0)^{n+1}k^{n*}(u-x)\int_0^x k(z)dz+\sum_{n=1}^{\infty}\psi(0)^{n+1}\int_0^{u-x}k^{n*}(s)k(u-x-s)ds\\
&=\psi(0)k(u-x)-\sum_{n=1}^{\infty}\psi(0)^{n+1}k^{n*}(u-x)K(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\psi(0)^{n+1}k^{(n+1)*}(u-x)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\psi(0)^{n}k^{n*}(u-x)-\sum_{n=1}^{\infty}\psi(0)^{n+1}k^{n*}(u-x)K(x)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\psi(0)^{n}k^{n*}(u-x)[1-\psi(0)K(x)].
\end{aligned}
$$

Vastaavasti olettamalla, että $x \longrightarrow \infty$, voidaan kirjoittaa

$$
\psi(u-x)=\psi(0)(1-K(u-x))+\sum_{n=1}^{\infty}\psi(0)^{n+1}\int_0^{u-x}k^{n*}(s)\int_{u-x-s}^{\infty}k(z)dzds
$$

siten, että

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\psi(u-x)\\
&=\psi(0)k(u-x)-\sum_{n=1}^{\infty}\psi(0)^{n+1}k^{n*}(u-x)+\sum_{n=1}^{\infty}\psi(0)^{n+1}\int_0^{u-x}k^{n*}(s)k(u-x-s)ds\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\psi(0)^{n}k^{n*}(u-x)-\sum_{n=1}^{\infty}\psi(0)^{n+1}k^{n*}(u-x)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\psi(0)^{n}k^{n*}(u-x)[1-\psi(0)].
\end{aligned}
$$

Täten

$$
\frac{\partial}{\partial x}G(u-x,x)=\frac{1-\psi(0)K(x)}{1-\psi(0)}\frac{\partial}{\partial x}\psi(u-x).
$$

Koska $G(0,x)=\psi(0)K(x)$, niin yhtälöstä (5.16) saadaan

$$
w(u,x)=g(0,x)\frac{\psi(u-x)-\psi(u)}{1-\psi(0)}=\frac{\lambda}{c}(1-F(x))\frac{\psi(u-x)-\psi(u)}{1-\psi(0)},
$$

kun $u<x$.

Jos tiedetään sekä F että ψ, niin tällöin tiedetään myös w. On merkittävää, kuinka vähän tietoa tarvitaan intensiteetin w löytämiseksi. Näiden tulosten perusteella on myös selvää, että kun $u > 0$, niin intensiteetillä $w(u,x)$ on epäjatkuvuuskohta pisteessä $x = u$.

Yhtäläisyys $W(0,x) = G(0,x)$ voidaan selittää kahdella tapaa. Tarkastellaan ylijäämäprosessia, joka alkaa arvosta $u = 0$, ja jossa vararikko aiheutuu siitä, että ylijäämä ennen vararikkoa on vähemmän kuin x. Prosessia voidaan tarkastella kaksiosaisena prosessina $(\hat{U}(t))_{t\geq 0}$, missä vararikko tapahtuu alijäämällä, joka on alle x. Kaksoisprosessi muodostetaan seuraavasti: $\hat{U}(t) = -U(T_0' - t)$, kun $0 \geq t \geq T_0'$ ja $\hat{U}(t) = U(t)$, kun $t > T_0'$, missä T_0' on ajanhetki, jolloin ylijäämäprosessi ensimmäisen kerran leikkaa ylijäämän nollatason.

5.4 Vararikon ajanhetki

Tarkastellaan vararikon ajanhetken T_u jakaumaa. Olkoon $\mathrm{P}(T_u \leq t)$ todennäköisyys sille, että vararikko tapahtuu ennen ajanhetkeä t. Toisin sanoen, jos tiedetään muuttujan T_u jakauma, niin tällöin voidaan laskea äärellisen ajan vararikkotodennäköisyys.

Määritelmä 5.7. Määritellään funktio φ seuraavasti:

$$\varphi(u,\delta) = \mathrm{E}[e^{-\delta T_u} I(T_u < \infty)],$$

missä δ on epänegatiivinen parametri, jota tarkastellaan tässä osiossa Laplace-muunnoksen parametrina, ja $I(A)$ on tapahtuman A indikaattori.

Esimerkki 5.8. Tarkastellaan muuttujaa $\varphi(u,\delta)$ odotettuna nykyarvona maksettavalle vahingolle vararikon hetkellä. Yhtälö muuttujalle φ saadaan ehdollistamalla ensimmäisen vahingon aikaa ja määrää, ottaen huomioon alentavan tekijän funktion φ määritelmässä.
Olkoon δ koron määrä ja $I(A) = 1$. Täten
(5.17)

$$\varphi(u,\delta) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-\delta t} \int_0^{u+ct} f(x)\varphi(u+ct-x,\delta)dxdt + \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-\delta t} \int_{u+ct}^\infty f(x)dxdt.$$

Käytettävissä oleva varallisuus koostuu alkuylijäämästä ja kertyneestä maksutulosta. Merkitään tätä $s = u + ct$, ja sijoitetaan tämä yhtälöön (5.17), jolloin saadaan

$$\varphi(u,\delta) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-(\lambda+\delta)\frac{(s-u)}{c}} \int_0^s f(x)\varphi(s-x,\delta)dxds + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-(\lambda+\delta)\frac{(s-u)}{c}} \int_s^\infty f(x)dxds,$$

ja derivoimalla tätä muuttujan u suhteen saadaan

$$\frac{\partial}{\partial u}\varphi(u,\delta) = \frac{\lambda+\delta}{c}\varphi(u,\delta) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u f(u-x)\varphi(x,\delta)dx - \frac{\lambda}{c}(1-F(u)). \tag{5.18}$$

Tämä yhtälö (5.18) on yleinen yhtälö, jota voidaan soveltaa erilaisille funktion F muodoille. Keskitytään erityistapaukseen, jossa $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}, x \geq 0$. Sijoittamalla f ja F yhtälöön (5.18) saadaan

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\varphi(u,\delta) &= \frac{\lambda+\delta}{c}\varphi(u,\delta) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \alpha e^{-\alpha(u-x)}\varphi(x,\delta)dx - \frac{\lambda}{c}e^{-\alpha u} \\
&= \frac{\lambda+\delta}{c}\varphi(u,\delta) - \frac{\lambda}{c}e^{-\alpha u}\int_0^u \alpha e^{-\alpha x}\varphi(x,\delta)dx - \frac{\lambda}{c}e^{-\alpha u}.
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

Käyttämällä samaa tekniikkaa kuin osiossa selviämistodennäköisyys, saadaan derivoimalla

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\varphi(u,\delta) = \frac{\lambda+\delta}{c}\frac{\partial}{\partial u}\varphi(u,\delta) + \frac{\alpha\lambda}{c}e^{\alpha u}\int_0^u \alpha e^{-\alpha x}\varphi(x,\delta)dx - \frac{\alpha\lambda}{c}\varphi(u,\delta) + \frac{\alpha\lambda}{c}e^{-\alpha u}$$

siten, että

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\varphi(u,\delta) + \alpha\frac{\partial}{\partial u}\varphi(u,\delta) = \frac{\lambda+\delta}{c}\frac{\partial}{\partial u}\varphi(u,\delta) + \frac{\alpha\delta}{c}\varphi(u,\delta)$$

tai

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\varphi(u,\delta) + (\alpha - \frac{\lambda+\delta}{c})\frac{\partial}{\partial u}\varphi(u,\delta) - \frac{\alpha\delta}{c}\varphi(u,\delta)dx = 0. \tag{5.20}$$

Yleinen ratkaisu tälle yhtälölle (5.20) on

$$\varphi(u,\delta) = \kappa_1 e^{\rho_\delta u} + \kappa_2 e^{-R_\delta u},$$

missä $\rho_\delta > 0$ ja $-R_\delta < 0$ ovat juuria karakteristiselle yhtälölle (5.20), mikä on

$$s^2 + (\alpha - \frac{\lambda+\delta}{c})s - \frac{\alpha\delta}{c} = 0 \tag{5.21}$$

ja κ_1 ja κ_2 ovat riippuvaisia muuttujasta δ. Koska

$$\varphi(u,\delta) \leq \psi(u),$$

niin

$$\lim_{u\to\infty}\varphi(u,\delta) = 0,$$

ja tästä seuraa, että $\kappa_1 = 0$ ja $\kappa_2 = \varphi(u,\delta)$. Jotta löydettäisiin $\varphi(u,\delta)$, sijoitetaan $\varphi(u,\delta)e^{-R_\delta u}$ yhtälöön (5.19) ja saadaan

$$
\begin{aligned}
-R_\delta\varphi(0,\delta)e^{-R_\delta u} &= \frac{\lambda+\delta}{c}\varphi(0,\delta)e^{-R_\delta u} - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \alpha e^{-\alpha(u-x)}\varphi(0,\delta)e^{-R_\delta x}dx - \frac{\lambda}{c}e^{\alpha u} \\
&= \frac{\lambda+\delta}{c}\varphi(0,\delta)e^{-R_\delta u} - \frac{\lambda\alpha}{c}e^{-\alpha u}\varphi(0,\delta)\frac{1}{\alpha - R_\delta}(e^{(\alpha-R_\delta)u}) - \frac{\lambda}{c}e^{\alpha u}.
\end{aligned}
$$

Järjestämällä tämä yhtälö uudelleen saadaan

$$0 = \varphi(0,\delta)e^{-R_\delta u}(R_\delta + \frac{\lambda+\delta}{c} - \frac{\lambda\alpha}{c}\frac{1}{\alpha - R_\delta}) + e^{\alpha u}(\frac{\lambda\alpha}{c}\frac{\varphi(0,\delta)}{\alpha - R_\delta} - \frac{\lambda}{c}),$$

mistä saadaan $\varphi(0,\delta) = 1 - \frac{R_\delta}{\alpha}$, sillä

$$R_\delta + \frac{\lambda+\delta}{c} - \frac{\lambda\alpha}{c}\frac{1}{\alpha - R_\delta} = \frac{-1}{\alpha - R_\delta}(R_\delta^2 - (\alpha - \frac{\lambda+\delta}{c})R_\delta - \frac{\alpha\delta}{c}) = 0$$

yhtälön (5.21) perusteella. Täten

$$\varphi(u,\delta) = (1 - R_\delta\alpha)e^{-R_\delta u}. \tag{5.22}$$

Asettamalla $\delta = 0$ saadaan

$$\varphi(u,0) = \mathrm{E}[I(T_u < \infty)] = \psi(u).$$

Koska R_0 on oikaisukerroin, niin yhtälöstä (5.22) saadaan lopullisen vararikon todennäköisyys erikoistapauksena. Yhtälön (5.21) perusteella saadaan

$$R_\delta = \frac{-\lambda - \delta + c\alpha + \sqrt{(-\lambda - \delta + c\alpha)^2 + 4c\delta\alpha}}{2c}. \tag{5.23}$$

Käytetään nyt yhtälöä (5.22), jotta löydetään sekä ajanhetki että intensiteettifunktio muuttujalle T_u. Ajanhetken löytämiseksi havaitaan, että

$$(-1)^k \frac{\partial^k}{\partial\delta^k}\varphi(u,\delta) \mid (\delta = 0) = \mathrm{E}[T_u^k I(T_u < \infty)].$$

Täten toistuvalla derivoinnilla funktion φ suhteen saadaan vararikon ajanhetket.

Esimerkiksi

$$\frac{\partial}{\partial\delta} = -\frac{R'_\delta}{\alpha}e^{-R_\delta u} - (1 - \frac{R_\delta}{\alpha})R'_\delta u e^{R_\delta u},$$

ja yhtälön (5.23) perusteella

$$R'_\delta = \frac{1}{2c}(-1 + ((c\alpha - \delta - \lambda)^2 + 4c\delta\alpha)^{-\frac{1}{2}}(\delta + \lambda + c\alpha)),$$

mistä saadaan

$$R'_0 = \frac{\lambda}{c(c\alpha - \lambda)}.$$

Koska R_0 on oikaisukerroin, niin saadaan

$$R_0 = \alpha - \frac{\lambda}{c}$$

ja tällöin

$$\mathrm{E}[T_u I \mid (T_u < \infty)] = \frac{R'_0}{\alpha}e^{-R_0 u} + (1 - \frac{R_0}{\alpha})R'_0 u e^{R_0 u}.$$

Jaetaan tämä funktiolla

$$\psi(u) = (1 - \frac{R_0}{\alpha})e^{-R_0 u}$$

ja saadaan vararikon odotettu ajanhetki, olettaen että vararikko tapahtuu, eli

$$\mathrm{E}[T_{u,c}] = \frac{R_0'}{\alpha - R_0} + R_0' u = \frac{c + \lambda u}{c(c\alpha - \lambda)},$$

missä $T_{u,c} = T_u$ kun $(T_u < \infty)$. Korkeammat muuttujan $T_{u,c}$ arvot voidaan löytää samaan tapaan. Kirjoitetaan nyt

$$\varphi(u, \delta) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\omega(u, t)dt,$$

josta halutaan löytää ω. Havaitaan, että

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[e^{-\delta T_u}] &= \mathrm{E}[e^{-\delta T_u} \mid T_u < \infty]\mathrm{P}(T_u < \infty) + \mathrm{E}[e^{-\delta T_u} \mid T_u = \infty]\mathrm{P}(T_u = \infty) \\ &= \mathrm{E}[e^{-\delta T_u}]\psi(u).\end{aligned}$$

Edelleen, koska

$$e^{-\delta T_u} = e^{-\delta T_u} I, \text{ kun } (T_u < \infty),$$

ja koska tämän yhtälön molemmat puolet ovat $e^{-\delta T_u}$, jos $T_u < \infty$ ja nolla muutoin, niin

$$\mathrm{E}[e^{-\delta T_u} \mid T_u < \infty] = \mathrm{E}[e^{-\delta T_u}] = \mathrm{E}[e^{-\delta T_{u,c}}]\psi(u),$$

mistä saadaan

$$\mathrm{E}[e^{-\delta T_{u,c}}] = \frac{\varphi(u, \delta)}{\psi(u)}$$

siten, että $\frac{\varphi(u,\delta)}{\psi(u)}$ on muuttujan $T_{u,c}$ Laplace-muunnos. Koska muuttujalla $T_{u,c}$ on intensiteettifunktio $\frac{1}{\psi(u)}\frac{\partial}{\partial t}\psi(u, t)$, niin

$$\omega(u, t) = \frac{\partial}{\partial t}\psi(u, t).$$

Edelleen

$$1 - \frac{R_\delta}{\alpha} = \frac{1}{2c\alpha}(c\alpha + \lambda + \delta - \sqrt{(c\alpha - \lambda - \delta)^2 + 4c\delta\alpha}).$$

Ja koska

$$(c\alpha - \lambda - \delta)^2 + 4c\delta\alpha = (c\alpha + \lambda + \delta)^2 - 4c\alpha\lambda,$$

niin saadaan

$$\varphi(u, \delta) = e{-}\alpha u \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha u)^j}{j!}(\frac{c\alpha + \lambda + \delta - \sqrt{(c\alpha + \lambda + \delta)^2 - 4c\delta\alpha}}{2c\alpha})^{j+1}.$$

Tätä Laplace-muunnosta voidaan soveltaa eri aikaväleille. Oletetaan ensin, että $s = c\alpha + \lambda + \delta$ ja $a = 2\sqrt{c\alpha\lambda}$, joten voidaan kirjoittaa

$$\varphi(u,\delta) = \frac{e^{-\alpha u}}{2c\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}(\frac{u}{2c})^j \frac{(s-\sqrt{s^2-a^2})^{j+1}}{j!}.$$

Monet käänteisen järjestyksen ongelmat voidaan ratkaista käyttämällä Laplace-muunnosta. Tällöin saadaan

$$\beta^*(\delta) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\beta(t)dt = (\delta - \sqrt{\delta^2 - a^2})^{\nu},$$

jolloin

$$\beta(t) = \frac{\nu a^{\nu}}{t} I_{\nu}(at),$$

missä

$$I_{\nu}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{t}{2})^{2n+\nu}}{n!(n+\nu)!}$$

on modifioitu Besselin funktio muuttujan ν suhteen. Besselin funktioita ei käsitellä tässä tutkielmassa. Havaitaan myös, että funktiolle h on olemassa positiivinen vakio b, jolle

$$\int_0^{\infty} e^{-\delta x}e^{-bx}h(x)dx = h^*(\delta + b).$$

Soveltamalla näitä kahta tulosta voidaan päätellä että $\varphi(u,\delta)$ on funktion

$$w(u,t) = \frac{e^{-\alpha u-(\lambda+c\alpha)t}}{2c\alpha t} \times \sum_{j=0}^{\infty}(\frac{u}{2c})^j \frac{(j+1)(2\sqrt{c\alpha\lambda})^{j+1})}{j!} I_{j+1}(2t\sqrt{c\alpha\lambda})$$

Laplace-muunnos. Nyt saadaan intensiteetti muuttujalle $T_{u,c}$, jota merkitään $w_c(u,t)$, jakamalla $w(u,t)$ arvolla $\psi(u)$. Tällöin saadaan

$$w_c(u,t) = \frac{e^{-(\lambda+c\alpha)t-\frac{\lambda u}{c}}}{2c\alpha t} \times \sum_{j=0}^{\infty}(\frac{u}{2c})^j \frac{(j+1)(2\sqrt{c\alpha\lambda})^{j+1})}{j!} I_{j+1}(2t\sqrt{c\alpha\lambda}). \tag{5.24}$$

Vaikka yllä oleva kaava näyttää monimutkaiselta, niin se on suoraviivainen implementoida matemaattisiin ohjelmistoihin. Tämä lähestymistapa ei kuitenkaan johda ratkaisuihin vararikon ajan intensiteetin löytämiseksi muille yksittäisille vahinkomäärille. Yhtälö (5.24) tarjoaa keinot arvoida tällaisia intensiteettejä, sillä klassista riskiprosessia voidaan approksimoida käyttämällä De Vylderin menetelmää (ks. [3, s.178-179]) ja riskiprosessin approksimoimiseksi vararikon ajanhetken intensiteetti saadaan yhtälöstä (5.24). De Vylderin menetelmää ei käsitellä tässä tutkielmassa.

Tutkielmassa on tarkasteltu vararikon todennäköisyyttä ja vararikkoon johtavia seikkoja. Kun tunnistetaan vararikolle altistavat tekijät, ja siten voidaan arvioida vararikon todennäköisyyttä, voidaan vararikon riskiltä suojautua ja siten pyrkiä välttämään vararikko. Alkuvarallisuuden tulisi maksutulon kanssa riittää kattamaan vahingoista aiheutuva korvausvastuu. Haastetta luo vakuutusyhtiöiden välinen kilpailu, joka osaltaan rajoittaa maksutuloa. Maksutulon tulisi olla sellainen, että vakuutusmaksut ovat kilpailukykyisiä, mutta niistä kertyvä maksutulo on vakuutettuihin riskeihin nähden riittävä.

Lähteet

[1] Beard R. E., Pentikäinen T., Pesonen E. *Risk theory*. Chapman and Hall, Cambridge, 1979.

[2] Bühlmann H. *Mathematical methods in risk teory*. Springer, Berlin, 1996.

[3] Dickson, D. *Insurance risk and ruin*. Cambridge university press, Cambridge, 2005.

[4] Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M. *Modern actuarial risk theory*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2001.

[5] Mikosch, T. *Non-life insurance mathematics*. Springer, Berlin, 2004.

[6] Promislow S. D. *Fundamentals of acturial mathematics*. John Wiley and Sons Ltd, Sussex, 2006.

[7] Tse, Y. *Nonlife actuarial models*. Cambridge university press, New York, 2009.

[8] Tuominen, P. *Todennäköisyyslaskenta 1*. Cosmoprint Oy, Helsinki 2010.

[9] Wüthrich, M. *Stochastic claims reserving methods in insurance*. John Wiley and Sons Ltd, Sussex, 2008.